MATHEMATISCH-PHYSIKALISCHE SCHRIFTEN
FÜR INGENIEURE UND STUDIERENDE
HERAUSGEGEBEN VON E. JAHNKE

II, 1

GRUNDZÜGE DER MATHEMATISCH-PHYSIKALISCHEN AKUSTIK

VON

DR. ALFRED KALÄHNE

I.



Mathematisch-physikalische Schriften für Ingenieure und Studierende.

Herausgegeben von Dr. E. Jahnke,
Prof. a. d. Kgl. Bergakademie zu Berlin.

Die Entwicklung der modernen Technik drängt auf stärkere Heranziehung der mathematischen Methoden. Der Ingenieur indessen, welcher bereit ist, sich mit dem nötigen Rüstzeug zu versehen, sieht sich vergeblich nach kurzen Darstellungen um, die geeignet wären, ihn schnell in das besondere Gebiet, das ihn gerade interessiert, einzuführen. — Diese Lücke will vorliegende Sammlung ausfüllen. Sie setzt sich zum Ziel, dem Ingenieur Schriften zu bieten, welche auf etwa 100 Seiten für ein eng begrenztes Gebiet die mathematischen Methoden einfach und leichtfaßlich ableiten und deren Verwendbarkeit in den einzelnen Teilen von Physik und Technik aufdecken. Dabei kann Vollständigkeit der Beweisführung, die vom Standpunkte wissenschaftlicher Strenge erstrebenswert wäre, hier nicht erwartet werden. Vielmehr wird besonderer Wert darauf gelegt, Dinge, die für die Anwendungen von Wichtigkeit sind, nicht zugunsten wissenschaftlicher Strenge zurücktreten zu lassen. Die Darstellung der einzelnen Gebiete wird so gehalten sein, daß jedes ein abgeschlossenes Ganzes für sich bildet.

Bisher erschienene Bändchen:

I. Einführ. i. d. Theorie d. Magnetismus. Von R. Gans, Prof. a. d. Univ. Tübingen. 1908. Geh. M 2.40, geb. M 2.80.

II. Elektromagnet. Ausgleichsvorgänge in Freileitungen und Kabeln. Von K. W. Wagner, Ingen. i. Charlottenburg. 1908. Geh. M 2.40, geb. M 2.80.

III. Einführ. in die Maxwellsche Theorie der Elektrizität und des Magnetismus. Von Cl. Schaefer, Privatdoz. a. d. Univ. Breslau. 1908. Geh. M 3.40, geb. M 3.80.

IV. Die Theorie der Besselschen Funktionen. Von P. Schafheitlin, Prof. am Sophien-Realgymn. zu Berlin. 1908. Geh. M 2.80, geb. M 3.20.

V. Funktionentafeln m. Formeln und Kurven. Von E. Jahnke und F. Emde, Ingenieur in Berlin. 1909. Geb. M 6.—

VI, 1 u. 2. Die Vektoranalysis und ihre Anwendungen in der theoret. Physik. Von W. v. Ignatowsky in Berlin. I. Teil. 1909. II. Teil. 1910. Geh. je M 2.60, geb. je M 3.—

VII. Theorie d. Kräftepläne. Von H. E. Timerding, Prof. a. d. Techn. Hochschule Braunschweig. 1910. Geh. M 2.60, geb. M 3.—

VIII. Mathematische Theorie der astronom. Finsternisse. Von P. Schwahn, Direktor der Urania in Berlin. 1910. Geh. M 3.20, geb. M 3.60.

IX. Die Determinanten. Von E. Netto, Prof. an der Univ. Gießen. 1910. Geh. M 3.20, geb. M 3.60.

...nungen.

MATHEMATISCH-PHYSIKALISCHE SCHRIFTEN
FÜR INGENIEURE UND STUDIERENDE
HERAUSGEGEBEN VON E. JAHNKE
11,1

GRUNDZÜGE DER MATHEMATISCH-PHYSIKALISCHEN AKUSTIK

VON

DR. ALFRED KALÄHNE
PROFESSOR AN DER TECHNISCHEN HOCHSCHULE
ZU DANZIG

I. TEIL
MIT 19 FIGUREN IM TEXT

LEIPZIG UND BERLIN
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1910

VORWORT.

An neueren Büchern über Akustik ist gegenwärtig kein Mangel; soweit sie ganz oder wenigstens teilweise die mathematische und physikalische Akustik behandeln, sind sie neben einigen älteren im Literaturverzeichnis am Anfang des vorliegenden Bändchens aufgeführt. Doch ist, wenn man von dem erst neuerdings während der Drucklegung des vorliegenden Bändchens erschienenen Lambschen Buche absieht, keins darunter, das bei mäßigem Umfang die Theorie einigermaßen ausführlich bringt, so daß man in dieser Beziehung auf die Benutzung umfangreicher Werke, wie Lord Rayleighs „Theory of Sound", angewiesen ist, wenn man nicht gar auf die Originalarbeiten zurückgehen muß. Für denjenigen, der sich nicht speziell mit theoretischer Akustik beschäftigt, ist das aber eine kaum zu erfüllende Forderung, die leicht von weiterer Verfolgung des Gegenstandes abschreckt.

Das neue, in zwei Einzelbänden erscheinende Buch bezweckt, die wichtigsten Teile der mathematisch-physikalischen Akustik auf knappem Raum möglichst einfach darzustellen. Dabei ist auf die Anwendung der Theorie besonderer Wert gelegt und diese, wo es angeht, mit Zahlenbeispielen und Zeichnungen erläutert. Die Figuren sind zum überwiegenden Teil nicht schematisch, sondern den Zahlenwerten entsprechend gezeichnet, um richtige Vorstellungen zu vermitteln. Den Herren Professor Dr. M. Wien in Danzig-Langfuhr und Professor Dr. Zenneck in Braunschweig (jetzt in Ludwigshafen am Rhein) bin ich für Überlassung einiger Zeichnungen zu Dank verpflichtet.

OLIVA bei Danzig
im August 1910.

A. KALÄHNE.

LITERATURVERZEICHNIS.

1. Lord Rayleigh, Theory of Sound. 2 Bde. 2nd ed. 1894 und 96 London; 1. Aufl. deutsch von Neesen. Braunschweig 1880.
2. H. v. Helmholtz, Die Lehre von den Tonempfindungen als physiologische Grundlage für die Theorie der Musik. 5. Ausgabe. Braunschweig 1906.
3. W. C. L. van Schaik, Wellenlehre und Schall. Braunschweig 1902 (deutsche Ausgabe von Fenkner).
4. Handbuch der Physik (herausg. von Winkelmann). Band II (Akustik) bearb. von F. Auerbach. Leipzig 1909.
5. H. Starke, Physikalische Musiklehre. Leipzig 1908.
6. E. H. Barton, Text-Book on Sound. London 1908.
7. J. Tyndall, Der Schall. Deutsche Bearbeitung von A. v. Helmholtz und Cl. Wiedemann. 3. Aufl. Braunschweig 1897.
8. K. L. Schaefer, Musikalische Akustik. Leipzig 1902 (Sammlung Göschen). Mit umfangreichem Literaturverzeichnis.
9. L. A. Zellner, Vorträge über Akustik. Wien u. Leipzig 1892.
10. Jonquière, Grundriß der musikalischen Akustik. Leipzig 1898.
11. F. Melde, Akustik. Leipzig 1883.
12. G. B. Airy, On Sound and Atmospheric Vibrations. London 1871. 2nd ed.
13. E. F. F. Chladni, Die Akustik. Leipzig 1802.
14. Derselbe, Neue Beiträge zur Akustik. Leipzig 1817.
15. H. Lamb, The Dynamical Theory of Sound. London 1910.
16. Derselbe, Schwingungen elastischer Körper, insbesondere Akustik; in Enzyklopädie d. math. Wissenschaften, IV. Band (Mechanik), Art. 26. Leipzig 1907.

INHALTSVERZEICHNIS.

1. Kapitel.

2. Kapitel.

Fouriersche Reihen und harmonische Analyse.

3. Kapitel.

Musikalische Gliederung des Tonbereichs.

4. Kapitel.

System mit einem Freiheitsgrad. Ungedämpfte Eigenschwingungen eines Massenpunktes.

5. Kapitel.

Gedämpfte Eigenschwingungen eines Massenpunktes.

6. Kapitel.

Mitschwingen und Resonanz ohne Rückwirkung. Erzwungene Schwingungen eines Massenpunktes.

7. Kapitel.
Systeme mit mehreren Freiheitsgraden und gekoppelte Schwingungen.

1. Kapitel.

Schwingungen und Wellen im allgemeinen.

1. Wesen und Anwendungen der physikalischen Akustik. Mathematische Grundlage. Die physikalische Akustik oder Lehre vom Schall behandelt diejenigen Schwingungen und Wellen der Materie, denen Wirkungen auf das Gehörorgan, das Ohr, entsprechen. Ihre Ergebnisse finden Anwendung in der physiologischen und psychologischen Akustik zur Erklärung des Mechanismus des Ohres und des Hörens, in der musikalischen Akustik, wo sie den ästhetischen Eindruck der Schallerscheinungen deuten lehren sowie die theoretische Grundlage für die in der Musik übliche Gliederung des Tonbereichs und die Harmonielehre liefern, und in der technischen Akustik, bei der es sich teils um die Herstellung von Schallquellen handelt (Instrumentenbau), teils um die Konstruktion von Räumen, in denen Schallwirkungen stattfinden sollen, wie den Hör- und Musiksälen, oder die gegen das Eindringen von Schallwellen geschützt sein sollen (Architektur- oder Gebäudeakustik). Von diesen ist der zuletzt genannte Zweig (Gebäudeakustik) am wenigsten entwickelt. Mathematisch betrachtet, ist die Akustik ein Teil der Mechanik, insbesondere der Mechanik elastischer Körper, deren Gesetze demnach der theoretischen Behandlung der Akustik zugrunde zu legen sind. Viele Erscheinungen lassen sich aber, wenigstens näherungsweise, einfach mittels der Mechanik starrer Massenpunkte behandeln.

2. Entstehung und Ausbreitung des Schalles. Der Schall geht aus von schwingenden Körpern (Schallquellen), die fest, flüssig oder gasförmig sein können. Er wird auf den Empfangsapparat (das Ohr oder ein diesem entsprechendes künstliches Instrument) durch das zwischenliegende elastische Medium übertragen. Dieses kann ebenfalls fest, flüssig oder gasförmig sein. In der Natur kommt hauptsächlich ein gasförmiges Medium, die atmosphärische Luft, in Betracht; nächstdem aber auch Flüssigkeiten (das Wasser bei den Unterwasser - Schallsignalen der

Marine) und auch feste Körper (der Erdboden in unterirdischen Tunnels und Bergwerken, die Wände und Decken der Häuser usw.). In allen diesen Körpern breitet sich der Schall wellenförmig aus. In Gasen und Flüssigkeiten (außer bei sehr zähen) kommen nur Longitudinalwellen vor, d. h. Wellen, bei denen die Teilchen des von der Welle durchzogenen Mediums in derselben Richtung hin- und herschwingen, in der die Welle fortschreitet, also in der Strahlrichtung; in festen Körpern (und in zähen Flüssigkeiten) existieren neben den longitudinalen auch Transversalwellen, d. h. Wellen, bei denen die Teilchen senkrecht zur Strahlrichtung schwingen.

3. Schwingungen und Wellen. Schwingungsdauer (Periode) und Schwingungszahl (Frequenz). Schwingungen und Wellen gehören eng zusammen. Die (fortschreitende) Welle ist Ausbreitung der Schwingungsbewegung auf neue Teile. Gemeinsames Charakteristikum beider ist, daß sich nach Ablauf gewisser, gleicher Zeitabschnitte periodisch immer wieder derselbe oder wenigstens nahezu derselbe Zustand einstellt, bei der Schwingung immer an demselben Orte des Mediums, bei der Welle jedoch immer an anderen Orten, die um bestimmte Strecken voneinander entfernt sind. Dieser charakteristische Zeitabschnitt heißt die Periode oder Schwingungsdauer, die bei Schallschwingungen gewöhnlich in Sekunden angegeben wird. Der reziproke Wert der Periode gibt in diesem Falle offenbar die Zahl der Schwingungen an, welche in einer Sekunde ausgeführt werden. Diese Zahl heißt Schwingungszahl in einer Sekunde oder Frequenz, auch wohl Schwingungszahl schlechthin, wenn kein Mißverständnis zu befürchten ist. Für die mathematische Behandlung kommt wegen der bequemeren Schreibweise (vgl. Nr. 5) noch die Schwingungszahl in 2π Sekunden (6,292 Sekunden) in Betracht, nach einem neueren Vorschlag Kreisfrequenz genannt, weil sie sich zu der gewöhnlichen Frequenz verhält wie der Umfang des ganzen Kreises $2\pi r$ zur Länge des als Einheit für die Winkelmessung dienenden Kreisbogens von der Länge des Radius r. Der Zusammenhang dieser Größen ist also (T Periode, N Frequenz, n Kreisfrequenz):

$$(1) \qquad n = 2\pi N = \frac{2\pi}{T}, \quad N = \frac{1}{T}.$$

Manchmal wird schon die Hälfte der ganzen Periode als Schwingungsdauer oder Periode bezeichnet, und dementsprechend

das Doppelte der hier definierten Schwingungszahl oder Frequenz als Schwingungszahl. Diese Bezeichnung war in der Mechanik beim Pendel üblich und ist in die Akustik mit übergegangen, besonders in Frankreich. Man kennzeichnet diese Größen durch den Zusatz „Halbschwingungen" oder einfache Schwingungen (französisch v. s. = vibrations simples) im Gegensatz zu den „Ganzschwingungen" oder doppelten Schwingungen (frz. v. d. = vibrations doubles). Z. B. sind 1024 v. s. gleich 512 v. d., und beide stellen denselben Ton dar, nämlich das sogannte zweigestrichene c, bezeichnet als c'' oder c_2.

Die Akustik hat es mit mechanischen Schwingungen zu tun; der Zustand des schwingenden Systems wird also durch mechanische Größen bestimmt, z. B. durch die Lage der Teile des Systems, ihre Geschwindigkeit, Beschleunigung, Dichte, Druck usw. Alle diese Größen können periodische Schwankungen erleiden, d. h. Schwingungen ausführen, die natürlich bei einem und demselben System eng miteinander verknüpft sind. Z. B. sind in der schwingenden Luftmasse einer Orgelpfeife die periodischen Lageänderungen der Luftteilchen von Druck- und Dichteänderungen gleicher Periode begleitet. Die Perioden der als Töne hörbaren Schwingungen reichen von etwa $\frac{1}{16}$ Sekunde als längster bis zu etwa $\frac{1}{20000}$ Sekunde als kürzester, die entsprechenden Frequenzen also von etwa 16 pro Sekunde als niedrigster bis zu etwa 20000 pro Sekunde als höchster.

Schwingungen finden immer um eine gewisse Ruhelage, einen Gleichgewichtszustand, herum statt. Die Ruhelage kann im Verlaufe der Schwingungen regelmäßig durchschritten werden (geradlinige Schwingungen); sie kann aber auch außerhalb der Schwingungsbahn liegen und nur gelegentlich oder am Schluß, beim Erlöschen der Schwingung, erreicht werden (elliptische und kreisförmige Schwingungen eines Pendels usw.).

Der Unterschied zwischen Schwingung eines Körpers und Wellen in demselben besteht darin, daß bei jener unmittelbar aneinander grenzende Teile des Systems gleichzeitig denselben Schwingungszustand haben, z. B. durch ihre Ruhe- oder Gleichgewichtslage hindurchgehen oder ihre größte Entfernung von derselben erreichen usw., bei dieser aber räumlich benachbarte Teile nicht gleichzeitig, sondern nacheinander denselben Schwingungszustand annehmen. Damit hängt es zusammen, daß die Welle fortschreitet. Als Typus der Schwingung gilt die Bewegung des

physikalischen Pendels, d. h. eines starren Körpers, der unter dem Einfluß der Schwere um eine feste Achse oszilliert. Typus der fortschreitenden Wellenbewegung sind die Oberflächenwellen auf Flüssigkeiten oder die Seilwellen, die auf einem mäßig gespannten längeren Seil oder Draht entlang laufen. Wellen können nur in ausgedehnten Medien vorkommen, die also drei, zwei oder wenigstens eine Dimension besitzen (räumliche, flächenhafte und lineare Systeme, letztere praktisch durch dünne Drähte, Saiten usw. dargestellt). Schwingungen können auch von einem materiellen Punkt ausgeführt werden, d. h. einem Körper, dessen Dimensionen bei endlicher Masse alle verschwindend klein sind (praktisch durch kleine Kugeln aus spezifisch schweren Substanzen darstellbar). Bei der Schwingung beschränkt sich die Bewegung auf die einmal ergriffenen Teile, bei der fortschreitenden Welle werden immer neue Teile ergriffen und in Schwingung versetzt.

4. Stehende Wellen. Knoten und Bäuche. Ein besonderer Fall der Schwingung ist die stehende Welle, so genannt, weil sie eine aus fortschreitenden Wellen hervorgegangene Bewegung darstellt, die sich nicht mehr weiter ausbreitet. Sie ist geradezu der Schwingungstypus aller elastischen Körper. Als Vorbild dient die Bewegung einer an beiden Enden eingespannten Saite. Diese kann entweder als Ganzes schwingen, d. h. so, daß alle ihre Punkte gleichzeitig nach derselben Richtung ausgebogen sind, oder in Teilen, d. h. so, daß die Punkte einer Abteilung gleichzeitig nach einer Richtung, z. B. nach oben, ausgebogen sind, die der benachbarten Abteilung zur selben Zeit nach der entgegengesetzten Seite, also nach unten. Vgl. Fig. 1. Der Schwingungszustand ist im letzteren Falle also nur abteilungsweise der gleiche; von einer Abteilung zur nächsten ist er zeitlich um eine halbe Periode verschoben. Die Stellen, wo die einzelnen, entgegengesetzt schwingenden Abteilungen aneinanderstoßen, wo also Ruhe herrschen muß, heißen Knoten (engl. nodes, franz. nœuds). Es gibt Knoten-

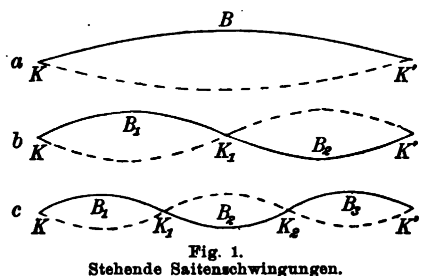


Fig. 1.
Stehende Saitenschwingungen.

a Grundschwingung mit einem Bauch B,
b 1. Oberschwingung mit zwei Bäuchen B_1, B_2 und einem inneren Knoten K_1,
c 2. Oberschwingung mit drei Bäuchen B_1, B_2, B_3 und zwei inneren Knoten K_1, K_2.

punkte, -linien oder -flächen, je nachdem die Schwingungen in Körpern stattfinden, die wesentlich in einer Dimension, linear, ausgedehnt sind, oder in zwei, d. h. flächenhaft, oder schließlich in allen drei Dimensionen. Die Stellen stärkster Bewegung zwischen den Knoten sind die Bäuche (engl. loops, frz. ventres). In Figur 1 sind die Punkte K Knoten, B Bäuche. Stehende Schwingungen oder Wellen (der Sprachgebrauch unterscheidet nicht scharf) können außer in kontinuierlichen elastischen Medien auch in Systemen vorkommen, die aus einzelnen getrennten Teilen bestehen, wenn zwischen diesen Kräfte wirken, die die Teile aneinander ketten (aus diskreten Massenpunkten aufgebautes System; z. B. zur Demonstration dienende Wellenmaschinen, die aus aufgehängten elastischen Kugeln bestehen usw.).

5. Phase und Schwingungsform. Sinusschwingung. Der jeweilige Schwingungszustand eines Teilchens (oder unter Umständen auch eines ausgedehnten Systems) heißt seine Phase (griech. *φάσις* Erscheinung, Aussehen). Zwei Teilchen haben gleiche Phase, wenn sie gleichzeitig denselben Schwingungszustand besitzen, entgegengesetzte Phase, wenn das eine diesen Schwingungszustand eine halbe Periode früher bzw. später annimmt. Allgemein spricht man von Phasendifferenz bzw. Phasenverschiebung, wenn beide den gleichen Zustand zu zwei verschiedenen Zeiten erreichen, die um irgendeinen Bruchteil der Periode auseinanderliegen. In mathematisch einfacher Form läßt sich die Phase mittels des Phasenwinkels bei den einfach pendelförmigen oder Sinusschwingungen ausdrücken.

Zur vollständigen Kenntnis der Schwingungsbewegung muß man wissen, wie sich der Zustand mit der Zeit ändert; die Schwingungsform muß gegeben sein. Bei Schwingungen, die sich nach Verlauf jeder Periode genau wiederholen (stationäre oder ungedämpfte Schwingung), braucht man nur das Verhalten während einer Periode, bei anderen, die sich nur angenähert reproduzieren (veränderliche, speziell die gedämpfte oder erlöschende Schwingung), muß man über dieselbe hinausgehen. Nach dem Fourierschen Satze (vgl. Nr. 9) läßt sich jede noch so komplizierte stationäre Schwingung durch Übereinanderlagerung einer Anzahl einfacher Sinusschwingungen darstellen, deren Perioden im Verhältnis der Brüche $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ abnehmen, deren Schwingungszahlen sich also entsprechend verhalten wie $1 : 2 : 3 : 4 \ldots$. Die längste dieser Perioden ist gleich der Periode

der darzustellenden stationären Schwingung selbst. Diese zunächst rein mathematische Zerlegung einer komplizierten Schwingungsfunktion in eine Fouriersche oder trigonometrische Reihe hat in sehr vielen Fällen zugleich hervorragende physikalische Bedeutung, weil Sinusschwingungen sich in der Natur häufig mit großer Annäherung herstellen lassen und erfahrungsgemäß der Gehöreindruck um so einfacher und reiner ist, je genauer die Schwingung einfache Sinusform besitzt.

Die mathematische Formel der Sinusschwingung lautet in verschiedenen gleichbedeutenden Formen (vgl. Nr. 3, Gl. (1)):

$$(2) \qquad \begin{cases} \Phi = a \sin(nt + \vartheta) \\ \Phi = a \sin(2\pi N t + \vartheta) \\ \Phi = a \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \vartheta\right). \end{cases}$$

Es ist a der Maximalwert, den Φ annimmt, wenn der Sinus gleich 1 wird, Amplitude oder Scheitelwert genannt, T Periode, N Frequenz, n Kreisfrequenz, ϑ die Phasenkonstante oder Epoche, t die variable Zeit, Φ dasjenige Element, welches die Schwingung ausführt (Koordinate, Geschwindigkeit eines Teilchens, Druck, Dichte oder dgl.).

Statt der Sinusfunktion kann die Kosinusfunktion gesetzt werden, wenn man die Phasenkonstante ϑ in $\vartheta' = \vartheta - \frac{\pi}{2}$ umändert. Also gleichbedeutend mit (2)

$$(3) \qquad \Phi = a \cos(nt + \vartheta') = a \cos\left(nt + \vartheta - \frac{\pi}{2}\right)$$

usw.

Der Winkel $nt + \vartheta$ unter der Sinusfunktion bzw. $nt + \vartheta'$ unter der Kosinusfunktion bestimmt hier in einfacher Weise in jedem Augenblick die Phase und wird gelegentlich schlechthin selbst als Phase, genauer jedoch als Phasenwinkel bezeichnet.

Jede stationäre (ungedämpfte) Sinusschwingung ist also durch drei unabhängige Bestimmungsstücke eindeutig bestimmt, nämlich 1. Amplitude, 2. Phasenkonstante, 3. Periode (oder damit gleichbedeutend Frequenz bzw. Kreisfrequenz).

Bei komplizierten Schwingungen, die durch eine Fouriersche Reihe dargestellt sind, hat man für jedes einzelne Sinusglied Amplitude, Phasenkonstante und Periode zu berücksichtigen.

6. Fortschreitende Wellen. Fortpflanzungsgeschwindigkeit und Wellenlänge. Bei der fortschreitenden Welle kommt als weiteres Kennzeichen die Ausbreitungs- oder Fortpflanzungsgeschwindigkeit hinzu und im Zusammenhange damit die Wellenlänge. Die Strecke, um welche die Welle während einer Periode weiterwandert, ist die Wellenlänge; diese ist daher allgemein auch die Entfernung zweier aufeinanderfolgender Punkte gleicher Phase, die in der Fortschreitungsrichtung liegen. Bei Oberflächenwellen auf Wasser läßt sie sich anschaulich machen als gegenseitiger Abstand je zweier benachbarter Wellenberge oder Täler. In Fig. 1c sind die Strecken B_1B_3 oder KK_2 oder K_1K' die Wellenlänge, wenn die Figur als Momentbild des Querschnitts eines Teils der Welle gedacht wird. Bei stehenden Wellen gilt ebenfalls die gegenseitige Entfernung zweier benachbarter Punkte gleicher Phase als Wellenlänge; doch hat dieser Ausdruck nur dann noch einen Sinn, wenn man die Richtung der ursprünglich vorhandenen fortschreitenden Wellen kennt, oder wenn überhaupt nur eine Richtung vorkommt, wie es bei linearen Medien (Saiten) der Fall ist.

Die Strecke, um die die Welle, d. h. die Schwingungsbewegung, in der Zeiteinheit fortschreitet, ist die Fortpflanzungs- oder Ausbreitungsgeschwindigkeit. Ist dieselbe konstant, was meist zutrifft, so verhält sich offenbar diese Strecke zur Wellenlänge, d. h. zu der Strecke, welche während einer Periode zurückgelegt wird, wie die Zeiteinheit zu der Periode (gemessen in jener Zeiteinheit). Ist daher λ die Wellenlänge, c die Fortpflanzungsgeschwindigkeit, T die Periode, N die Schwingungszahl in einer Sekunde (Frequenz), so gilt $c : \lambda = 1 : T$, also

$$\lambda = cT \quad \text{oder} \quad \lambda = \frac{c}{N} \cdot \tag{4}$$

Die Form der Welle, d. h. die Form der Schwingung, welche ein Teilchen während einer Periode ausführt, ist dabei gleichgültig.

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Schallwellen hängt von der Natur des Mediums, in festen Körpern auch noch von der Natur der Schwingung (longitudinal oder transversal) ab. Sie liegt nach den zuverlässigsten Messungen für Luft bei 0° C zwischen 331 und 332 Meter pro Sekunde, bei 20° C zwischen 343 und 344 m/Sek. Für Wasser ist sie bei gewöhnlicher Temperatur ungefähr 1435 m/Sek. (vgl. die Tabellen in Band II).

7. Verschiedene Arten von Wellen und ihre Einteilung. Je nach der geometrischen Natur des Wellenmediums hat man Wellen in ein-, zwei- und dreidimensionalen Medien. Nach dem Charakter der Ausbreitung, der von der Form des Schwingungszentrums, der Schallquelle, abhängt, unterscheidet man

a) in dreidimensionalen Medien:
   ebene Wellen (Quelle: eine gleichphasig schwingende Ebene),
   Zylinderwellen (Quelle: eine gleichphasig schwingende Gerade),
   sphärische oder Kugelwellen (Quelle: ein Punkt oder eine gleichphasig schwingende kleine Kugelfläche),
   kompliziertere Wellen.

b) in zweidimensionalen Medien:
   gerade Wellen (Quelle: eine gleichphasig schwingende Gerade),
   Kreiswellen (Quelle: ein Punkt oder eine gleichphasig schwingende Kreisperipherie),
   kompliziertere Wellen.

c) in eindimensionalen Medien ist nur eine Art von Wellenausbreitung in dem betrachteten Sinne möglich.

Das Charakteristische bei dieser Einteilung sind die Wellenflächen bzw. bei zweidimensionalen Medien die Wellenlinien. Das sind diejenigen Flächen bzw. Linien welche alle Punkte verbinden, die gleichzeitig dieselbe Phase haben. Bei Kugelwellen sind dies Kugeln, bei ebenen Wellen Ebenen usw. Bei komplizierteren Wellen können ganz eigenartige Wellenflächen auftreten, es sei hier an die Wellenfläche des Lichtes in Kristallen erinnert. Die von tönenden Körpern ausgehenden Wellen haben im allgemeinen sehr komplizierte Formen und lassen sich nur selten unter jene einfachen Fälle bringen.

Noch in anderer Beziehung läßt sich unterscheiden, nämlich in bezug auf die Richtung der Schwingung der Teilchen zur Fortpflanzungsrichtung. Danach gibt es

Longitudinale Wellen (Schwingungsrichtung parallel der Fortpflanzungsrichtung),

Transversale Wellen (Schwingungsrichtung senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung),

Schiefe Wellen (Schwingungsrichtung geneigt zur Fortpflanzungsrichtung).

Wie schon bemerkt wurde, ist die erste Art in Gasen und fast allen Flüssigkeiten allein vorhanden, nur in festen Körpern

kommt neben der ersten auch die zweite für die Akustik in Betracht, die dritte fällt weg, da kristallinische Medien hier keine Rolle spielen.

Gelegentlich ist noch zwischen Einzelwelle, begrenztem Wellenzug und unbegrenztem Wellenzug zu unterscheiden. Der Unterschied zwischen fortschreitenden und stehenden Wellen ist schon von vornherein gemacht worden. Die große Mannigfaltigkeit, welche der Wellenbewegung eigentümlich ist, macht ihr Studium etwas schwierig, aber auch um so anziehender.

8. Ebene Wellen. Mathematisch wird eine ebene oder gerade oder eine in einem eindimensionalen Medium (Seil, Saite) mit konstanter Geschwindigkeit nach der positiven x-Richtung hinlaufende Welle durch ein und dieselbe Formel dargestellt, nämlich:

$$\Phi = f(x - ct), \tag{5}$$

eine nach der negativen x-Richtung hinlaufende ebenso durch

$$\Phi = f(x + ct). \tag{6}$$

Φ ist dasjenige Element (Koordinate eines Teilchens, Entfernung aus der Ruhelage, Dichte usw.), welches die Schwingung ausführt, x die Abszisse, t die Zeit, c die konstante Fortpflanzungsgeschwindigkeit, f bedeutet irgendeine in ihrer Form ganz willkürliche Funktion des Argumentes $x - ct$ bzw. $x + ct$.

Zu jedem Wertepaar x, t gehört ein bestimmter Wert von Φ, d. h. ein bestimmter Zustand. Wie bei jeder Funktion von zwei oder mehr Variablen kann man eine von ihnen allein variieren lassen, während man die andern konstant hält. Läßt man x konstant, z. B. gleich x_1, so erhält man durch Variieren der Zeit t den zeitlichen Schwingungsvorgang an der Stelle x_1; läßt man die Zeit t konstant, z. B. gleich t_1, so erhält man das Momentbild der Welle in diesem Zeitpunkt. Wegen der linearen Verbindung $x - ct$ bzw. $x + ct$ der beiden Variablen ist dieses Wellenbild, wenn man es mit x als Abszisse und Φ als Ordinate graphisch darstellt, ähnlich dem graphisch dargestellten Schwingungsvorgang an irgendeiner bestimmten Stelle x_1, wenn man t als Abszisse und Φ als Ordinate nimmt; nur der Zeichnungsmaßstab ist wegen des Faktors c ein anderer.

Daß die Formeln (5) und (6) Wellen darstellen, erkennt man leicht, wenn man, von einem bestimmten Wertepaar x_1, t_1 aus-

gehend, t_1 um eine beliebige Zeit τ auf $t_2 = t_1 + \tau$ wachsen und gleichzeitig in (5) x_1 um die Strecke $\xi = c\tau$ auf $x_2 = x_1 + c\tau$ wachsen, in (6) um dieselbe Strecke auf $x_2' = x_1 - c\tau$ abnehmen läßt. In beiden Fällen wird das neue Argument gleich dem ursprünglichen, denn

$$x_2 - ct_2 = x_1 + c\tau - c(t_1 + \tau) = x_1 - ct_1$$

und

$$x_2' + ct_2 = x_1 - c\tau + c(t_1 + \tau) = x_1 + ct_1,$$

das heißt: derselbe Schwingungszustand Φ_1, der zur Zeit t_1 an der Stelle x_1 herrschte, findet sich zur Zeit t_2 an der Stelle x_2 bzw. x_2' wieder, ist also bis dahin fortgeschritten, was nach Nr. 3 das charakteristische Kennzeichen der Welle ist. Die lineare Verbindung $x - ct$ bzw. $x + ct$ von Zeit- und Raumkoordinaten im Argument der Wellenfunktion ist für jede ohne Änderung ihrer Form fortschreitende Welle charakteristisch.

Nimmt man speziell für die Funktion f die Sinus- bzw. Kosinusfunktion, so erhält man die Sinuswellen

$$\Phi = a \sin(x - ct), \quad \Phi = a \sin(x + ct) \tag{7}$$

usw.

Genau dieselben Gleichungen (5) und (6) können auch zur Darstellung der Zylinderwellen bzw. der Kreiswellen (in Flächen) und der Kugelwellen dienen, d. h. aller Wellenbewegungen, bei denen der Zustand außer von der Zeit t nur noch von einer Koordinate abhängt. Als solche dient bei den Zylinderwellen der Abstand r von der Achse, bei den Kugelwellen der Abstand r vom Mittelpunkt als dem Erregungszentrum. Die so dargestellte schwingende Größe Φ hat dabei jedoch keine oder wenigstens keine unmittelbar anschauliche physikalische Bedeutung. Im Fall der Kugelwellen ist sie das Produkt aus dem Radius r der betreffenden Wellenfläche und dem auf ihr herrschenden Geschwindigkeitspotential (vgl. Bd. II dieses Werkes).

2. Kapitel.

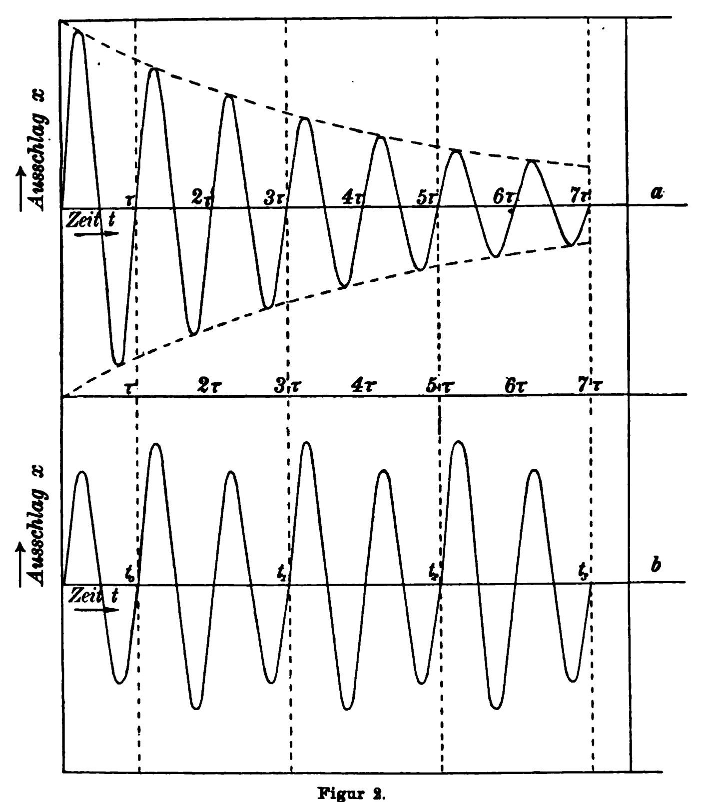
Fouriersche Reihen und harmonische Analyse.

9. Harmonische oder Fourieranalyse beliebiger Schwingungen und ihre physikalische Deutung. Ist die Schwingung bzw. Welle nicht einfach sinusförmig (harmonische oder pendel-

förmige Schwingung), sondern irgendwie gestaltet, so kann man sie, falls sie streng periodisch ist, nach dem Fourierschen Satze durch Übereinanderlagerung mehrerer (im Grenzfall unendlich vieler) Sinusschwingungen mit verschiedenen Perioden, d. h. analytisch als algebraische Summe derselben darstellen. Physikalisch betrachtet ist das eine Zusammensetzung der Schwingung aus sinusförmigen Partial- oder Teilschwingungen. Die Perioden der Glieder dieser Fourierschen Reihe stehen im Verhältnis $1 : \frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{4}$ usw. zueinander, die Frequenzen verhalten sich also wie $1 : 2 : 3 : 4$ usw. Die Periode der 1. Partialschwingung (Grundschwingung, Grundton) ist gleich der Periode der darzustellenden komplizierten Schwingung, die der 2., 3. usw. Partialschwingung (auch als 1., 2. usw. Oberschwingung oder Oberton bezeichnet) sind entsprechende Bruchteile davon.

Ist die Schwingung nicht streng, sondern nur annähernd periodisch, wie beispielsweise eine gedämpfte Schwingung, so läßt sie sich, wie überhaupt auch jede andere beliebige Funktion, innerhalb jedes beliebig herausgegriffenen Zeitintervalls ebenfalls durch eine Fouriersche Reihe darstellen, deren Grundperiode dieses beliebig gewählte Zeitintervall ist. Während aber die Reihe im ersten Falle für alle Zeiten gilt, also auch außerhalb des ursprünglichen Intervalls der unabhängigen Variablen die Schwingung richtig darstellt, ist dies bei der gedämpften Schwingung, und überhaupt bei nicht streng periodischen Funktionen, nicht mehr der Fall. Die Fouriersche Reihe ist nämlich genau periodisch und wiederholt sich außerhalb des Grundintervalls immer von neuem, während z. B. die gedämpfte Schwingung auf der einen Seite des beliebig ausgewählten Intervalls dauernd ansteigt, auf der andern dauernd abfällt. Man hat in diesem Falle also zwei verschiedene Funktionen (die gegebene Funktion und die zu ihrer Darstellung dienende Fourierreihe), die nur in einem beschränkten Bereich übereinstimmen. Die Figuren 2a und 2b veranschaulichen dies für die gedämpfte Sinusschwingung; auf der Abszissenachse ist die Zeit t, und als Ordinaten sind die jeweiligen Elongationen der Schwingung bzw. die aus der Fourierschen Reihe berechneten Werte aufgetragen. Die Strecken $t_3 - t_2$, $t_2 - t_1$, $t_1 - t_0$ sind einander gleich und stellen die willkürlich gewählte Grundperiode dar, die hier gleich dem doppelten der Schwingungsperiode angenommen ist. Um die Schwingung in ihrem ganzen Verlauf von Anbeginn der Schwingung bis $t = +\infty$ richtig darzustellen, müßte

man die Grundperiode der Fourierschen Reihe unendlich groß wählen; dann erhält man aber unendlich viele Partialschwingungen, deren Perioden stetig von ∞ bis 0 variieren. Die Zerlegung hat also keinen physikalischen Sinn mehr. Ebensowenig



Figur 2.

a exponentiell gedämpfte Sinusschwingung (Periode τ; Dekrement: dekadisches $\bar{b} = 0{,}1$, natürliches $b = 0{,}2303$).

b Fourierentwicklung derselben Schwingung im Intervall $t_1 - t_0 = 2\tau$.

hat aber die der Figur 2b zugrunde liegende Darstellung physikalischen Sinn, da ja die Periode der Grundschwingung hier durch keine Eigenschaft der darzustellenden Funktion im voraus bestimmt ist, so daß die willkürliche Wahl einer solchen eine unberechtigte Bevorzugung dieses Intervalls vor allen möglichen anderen ist.

Man muß also jedenfalls mit der Anwendung der Fourieranalyse oder harmonischen Analyse, wie sie auch genannt wird, und insbesondere der physikalischen Deutung ihrer Ergebnisse sehr vorsichtig sein. Das gilt erfahrungsgemäß auch für die Analyse solcher Schwingungen, die in ihrem Kurvenbild scheinbar sicher die Grundschwingungsperiode erkennen lassen. Kleine Änderungen des Kurvenbildes verursachen oft schon das Auftreten neuer Partialschwingungen oder beträchtliche Amplitudenänderungen vorhandener.

10. Mathematische Formeln für die Fouriersche Reihe. Innerhalb des Intervalls von x_1 bis $x_2 = x_1 + 2l$, oder, wenn $f(x)$ selbst periodisch ist mit der Periode $x_2 - x_1 = 2l$, auch außerhalb desselben, gilt zur Darstellung der Funktion $f(x)$ die Doppelreihe

$$(1)\quad \begin{aligned} f(x) = {} & a_1 \sin\frac{\pi x}{l} + a_2 \sin\frac{2\pi x}{l} + a_3 \sin\frac{3\pi x}{l} + \cdots \\ & + \frac{1}{2} b_0 + b_1 \cos\frac{\pi x}{l} + b_2 \cos\frac{2\pi x}{l} + b_3 \cos\frac{3\pi x}{l} + \cdots \\ & = \frac{1}{2} b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cos\frac{k\pi x}{l} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin\frac{k\pi x}{l}, \end{aligned}$$

wobei das Intervall, die Grundperiode,

$$(2)\qquad x_2 - x_1 = 2l$$

gesetzt ist.

Indem man die Glieder mit gleicher Frequenz zusammenfaßt und für die Amplituden-Koeffizienten a und b neue Konstanten (Amplitude und Phasenkonstante) einführt, kann man schreiben:

$$(3)\quad \begin{aligned} f(x) &= A_0 + A_1 \sin\left(\frac{\pi x}{l} + \vartheta_1\right) + A_2 \sin\left(\frac{2\pi x}{l} + \vartheta_2\right) + \cdots \\ &= A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin\left(\frac{k\pi x}{l} + \vartheta_k\right), \qquad k = 1, 2, 3, \ldots \end{aligned}$$

wobei

$$(4)\left\{\begin{aligned} & A_0 = \tfrac{1}{2} b_0, \quad A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}, \\ & \operatorname{tg}\vartheta_k = \frac{b_k}{a_k}; \text{ bzw. } \sin\vartheta_k = \frac{b_k}{\sqrt{a_k^2 + b_k^2}} \text{ und } \cos\vartheta_k = \frac{a_k}{\sqrt{a_k^2 + b_k^2}}. \end{aligned}\right.$$

Die Koeffizienten a_k und b_k einschließlich b_0 sind durch folgende bestimmte Integrale gegeben:

$$(5)\quad a_k = \frac{1}{l}\int_{x_1}^{x_1+2l} f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx,\quad b_k = \frac{1}{l}\int_{x_1}^{x_1+2l} f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}\,dx.$$

Den Beweis dafür findet man ausführlich in den Lehrbüchern der theoretischen Physik und ähnlichen Werken.[1]) Man erhält diese Werte, indem man Gl. (1) mit $\cos\frac{k\pi x}{l}$ bzw. $\sin\frac{k\pi x}{l}$ multipliziert und dann integriert. Bei der Integration fallen alle Integrale weg, welche Produkte zweier Sinus oder zweier Kosinus mit ungleichen Frequenzen oder Produkte von Sinus und Kosinus enthalten, und es bleibt rechts nur immer dasjenige Glied mit einem endlichen Wert übrig, welches $\cos^2$ bzw. $\sin^2$ enthält. Es gilt nämlich, wenn h und k ganze Zahlen sind:

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_{x_1}^{x_1+2l}\sin\frac{h\pi x}{l}\cos\frac{k\pi x}{l}\,dx = 0,\\ &\int_{x_1}^{x_1+2l}\sin\frac{h\pi x}{l}\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx = \begin{cases}0, & \text{wenn } h \gtrless k,\\ l, & \text{wenn } h = k > 0,\end{cases}\\ &\int_{x_1}^{x_1+2l}\cos\frac{h\pi x}{l}\cos\frac{k\pi x}{l}\,dx = \begin{cases}0, & \text{wenn } h \gtrless k,\\ l, & \text{wenn } h = k > 0,\\ 2l, & \text{wenn } h = k = 0.\end{cases}\end{aligned}\right.$$

Diese Gleichungen (6) sind ein Beispiel für die „Integraleigenschaften“ (conjugate properties) der sogenannten „Normalfunktionen“ in dem besonderen Fall der Kreisfunktionen Sinus bzw. Kosinus (vgl. Bd. II dieses Buches).

Bezüglich der Darstellung durch Fourierreihen ist noch folgendes zu bemerken. Wählt man, was häufig vorkommt, das Intervall, in dem entwickelt wird, so, daß der Koordinatenursprung in der Mitte desselben liegt, das Intervall also von $x = -l$ bis

1) Z. B. H. Weber, Die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik, Bd. I, § 28 ff., Braunschweig 1900; H. Lorenz, Lehrbuch der technischen Physik, Bd. I (Techn. Mechanik starrer Systeme), Kap. II, § 13, München u. Berlin 1902.

$x = +l$ reicht, so werden gerade Funktionen durch Reihen, die bloß Kosinusglieder enthalten, ungerade Funktionen durch Reihen mit Sinusgliedern dargestellt. Gerade Funktionen sind solche, die bei einem Vorzeichenwechsel der unabhängigen Variablen ihren Wert nicht ändern (z. B. $f(x) = ax^2$), ungerade solche, bei denen mit dem Vorzeichen der unabhängigen Variablen auch das Vorzeichen, aber nicht der absolute Wert der Funktion sich ändert (z. B. $f(x) = ax$). Gerade Funktionen verlaufen symmetrisch zur Ordinatenachse, ungerade dagegen spiegelbildlich symmetrisch, d. h. in bezug auf die Abszissenachse gespiegelt. Jede beliebige Funktion $f(x)$ läßt sich immer als Summe einer geraden und einer ungeraden Funktion ansehen; denn es ist

$$(7)\quad f(x) = \tfrac{1}{2}[f(x) + f(-x)] + \tfrac{1}{2}[f(x) - f(-x)] = \varphi(x) + \psi(x),$$

wo nun offenbar $\varphi(x)$ eine gerade, $\psi(x)$ eine ungerade Funktion ist, wie man durch Vertauschung des Argumentes $+x$ mit $-x$ erkennt.

Häufig kann man durch einfache Verschiebung des Koordinatenursprungs eine vorgelegte Funktion zu einer geraden oder ungeraden machen. Ein Beispiel bietet die (ungerade) Sinusfunktion selber, die bei Verlegung des Koordinatenanfangs um $\frac{\pi}{2}$ in die (gerade) Kosinusfunktion übergeht.

11. Bedeutung der Fourieranalyse für die Akustik. Ton und Klang. Da $\pm\cos\alpha = \sin\left(\alpha \pm \frac{\pi}{2}\right)$ und $\sin(\alpha \pm \pi) = -\sin\alpha$ usw. ist, so kann man die Sache auch so auffassen, daß die Fouriersche Doppelreihe Gl. (1) Nr. 10 aus lauter Sinusgliedern besteht, dabei aber jedes, eine Teilschwingung bestimmter Frequenz darstellende, Glied sich aus vier Komponenten zusammensetzt, welche Phasendifferenzen von 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$ bzw. — was auf das gleiche hinauskommt — von $+\frac{\pi}{2}$, $\pm\pi$, $-\frac{\pi}{2}$ gegeneinander besitzen. Diese spezielle Auffassung, die eine weitere Zerlegung der Gesamtschwingung darstellt, kommt jedoch für die Physik nicht in Betracht. Für diese ist im Gegenteil die Zerlegung in eine Sinus- und eine Kosinusreihe schon zu weitgehend und nur rechnerisch von Wert; physikalisch betrachtet ist die Zerlegung der Schwingung $f(x)$ nach Gl. (3) Nr. 10 in eine Reihe von Sinusschwingungen, deren Phasenkonstanten beliebige — natürlich in jedem Fall durch die

Form der Schwingung $f(x)$ gegebene — Werte $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots$ haben, das Richtige. Denn diese Sinusschwingungen sind die physikalischen Elemente, aus denen sich die kompliziertere Schwingung $f(x)$ aufbaut. Ob die Phasenkonstanten der Partialschwingungen die Tonempfindung, d. h. die Klangfarbe, beeinflussen, geht aus der mathematischen Behandlung natürlich nicht hervor, da die Entscheidung dieser Frage vom Mechanismus des Gehörapparates abhängt. Nach den Beobachtungen von Helmholtz ist kein derartiger Einfluß vorhanden. Eine neue Arbeit von Lindig[1]) bestätigt dies.

Der Wert der Fourieranalyse für die Akustik beruht darauf, daß 1. sehr viele akustische Schwingungen (Klänge) nur wenig oder gar nicht gedämpft sind, also durch Fourierreihen unbedenklich dargestellt werden können, und daß 2. nach der von G. S. Ohm aufgestellten, insbesondere von Helmholtz weitergeführten Hypothese eine sinusförmige Schwingung im Ohr den Eindruck eines einfachen Tones, jede andersförmige aber den Eindruck eines (zusammengesetzten) Klanges erzeugt, aus dem das Ohr unter Umständen die einzelnen einfachen Töne heraushört, so in der Natur das ausführend, was die Fourieranalyse mathematisch darstellt.

12. Praktische Fourieranalyse von Schwingungskurven. Ist die darzustellende Funktion $f(x)$ durch ihr analytisches Gesetz gegeben, so kann man aus den Gleichungen (5) Nr. **10** die Koeffizienten der Fourierschen Reihe, eventuell nach Näherungsmethoden, zahlenmäßig berechnen. Ist sie jedoch als Kurvendiagramm gegeben, das z. B. durch photographische Registrierung des Schwingungsvorgangs erhalten wurde, und soll auf die darin enthaltenen sinusförmigen Partialschwingungen untersucht werden, so muß man anders verfahren.

Es wird zuerst durch Ausmessung eines längeren Kurvenstücks die Grundperiode möglichst genau bestimmt. Innerhalb dieser werden dann in gleichem Abstand voneinander eine größere Anzahl Ordinaten ausgemessen und mit diesen die Koeffizienten a und b berechnet, indem die vorliegende Kurve durch die gebrochene Gerade ersetzt wird, welche die Endpunkte der gemessenen Ordinaten verbindet. Damit eine solche geradlinige Interpolation genau genug ist, darf die Zahl der Ordinaten nicht zu gering sein. Zwecks bequemer Rechnung wird man außerdem

1) F. Lindig, Annalen der Physik **10** (1903), 242. — Vgl. auch M. G. Lloyd u. P. G. Agnew, Bulletin of the Bureau of Standards (Washington) Bd. **6** Nr. 2 (1909), 255.

diese Zahl passend wählen. Zur Ausmessung und Konstantenberechnung sind auch Apparate konstruiert worden, die beides automatisch besorgen und die harmonische Analysatoren[1]) heißen. Will man ohne ihre Hilfe rechnen, so nimmt man zweckmäßig 12 oder 24 oder 36 oder auch (vgl. L. Hermann[2])) 40 Ordinaten.

Über die praktische Ausführung der Rechnung gibt es eine ziemlich umfangreiche Literatur[3]), namentlich auch in physiologischen Zeitschriften. Sie ist größtenteils im Handbuch der Physik (Bd. II, Akustik) aufgeführt. Dort sind auch für den Fall von 24 gemessenen Ordinaten die Werte der 6 ersten Koeffizienten a_1 bis a_6 und b_1 bis b_6 (mit Weglassung des belanglosen konstanten Gliedes b_0) als Funktionen derselben mitgeteilt. Ein ziemlich bequemes Rechenschema für 36 Ordinaten, durch das man a_1 bis a_9 und b_1 bis b_9 erhält, hat F. F. Martens[4]) in weiterer Ausbildung der Runge-Orlichschen Formeln neuerdings benutzt und ausführlicher beschrieben. Im allgemeinen kann man aus m gemessenen Ordinaten, also Teilung des Intervalls in m Teilintervalle — Voraussetzung ist ja, daß die Funktion strengperiodisch, also die $(m+1)^{te}$ nicht mehr mitbenutzte Ordinate am Ende des Intervalls gleich der ersten am Anfang ist — die Koeffizienten von insgesamt m Gliedern berechnen. Wenn dabei Sinus und Kosinusglieder vorkommen, so sind $\frac{1}{2}m$ Koeffizienten a und $\frac{1}{2}m$ Koeffizienten b damit zu bestimmen. Um die Rechnung kontrollieren zu können, treibt man die Ausnutzung des Materials aber besser nicht so weit, sondern beschränkt sich auf eine geringere Zahl von Koeffizienten.

Die gewöhnliche Art der Berechnung der Konstanten a_k und b_k ist im wesentlichen eine Auswertung der Integrale (5) in Nr. **10**, wenn man darin statt der Kurve $f(x)$ den treppenförmigen Linien-

1) Vgl. Handbuch d. Physik, 2. Aufl. (1909), B. II (Akustik), S. 37 ff.

2) L. Hermann, Pflügers Archiv für die gesamte Physiologie **47** (1890), 45. Vgl. auch J. Lindelöff, ebenda **85** (1901), 59 und **87** (1901), 597.

3) S. [1]). Vgl. auch E. Orlich, Aufnahme und Analyse von Wechselstromkurven (Braunschweig 1906, F. Vieweg u. Sohn), S. 76 u. 90; mit Zusätzen und Ergänzungen abgedruckt im Arch. d. Math. u. Ph. (3) **12** (1907), 231—240.

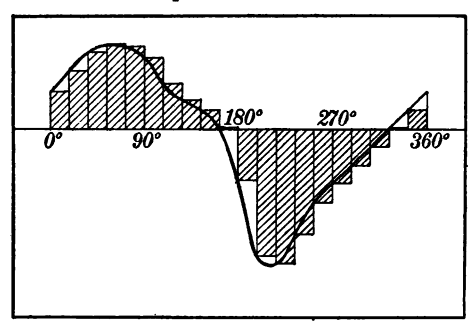
4) F. F. Martens, Verhandl. der Deutschen Physikal. Gesellsch. Jahrg. **11** [Berichte, Jahrg. **7**] (1909), 63. Im 17. Bande des Arch. d. Math. u. Phys. wird Herr Martens eine weitere Vereinfachung des Rechenschemas mitteilen.

zug einsetzt, der sich ergibt, indem man jede gemessene Ordinate mit einem horizontalen Dach von der Länge des kleinen Teilintervalls versieht, das statt des Differentials der Abszisse dienen soll (Integration nach der Rechteckformel). Vgl. Fig. 3. Setzt man dort t statt x und n statt $\frac{\pi}{l}$ (Kreisfrequenz), so ergibt sich

$$(8)\quad f(t) = a_1 \sin nt + a_2 \sin 2nt + \cdots + \tfrac{1}{2} b_0 + b_1 \cos nt + b_2 \cos 2nt + \cdots.$$

Die Gleichungen (5) von Nr. **10** werden also

$$(9)\quad a_k = \frac{1}{\pi} \int_{nt_1}^{nt_1+2\pi} f(t) \sin knt \cdot d(nt), \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{nt_1}^{nt_1+2\pi} f(t) \cos knt \cdot d(nt),$$



Figur 3.
Fourierentwicklung einer graphisch als Kurve gegebenen Funktion mit 20 Ordinaten im Entwicklungsintervall.
Abszissen: Phasenwinkel der Grundschwingung.
Ordinaten: Schwingungsausschläge.

wobei nunmehr $f(t)$ eine etwa graphisch aufgenommene Klangkurve ist. Teilt man nun z. B. das aus dem Diagramm erhaltene Grundintervall in 24 gleiche Teile, so entspricht das einer Teilung des Winkels 2π (Periode der Sinus- und Kosinusfunktion) in Teilintervalle von $\frac{2\pi}{24}$ oder 15 Bogengraden. Die angenäherte Berechnung der Integrale (9) gibt also Summen von der Form

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{2\pi}{24} \left[f_0 \sin 0 + f_1 \sin \frac{2\pi}{24} + f_2 \sin 2 \frac{2\pi}{24} + \cdots + f_{23} \sin 23 \frac{2\pi}{24} \right]$$

oder

$$a_1 = \tfrac{1}{12} [f_1 \sin 15^0 + f_2 \sin 30^0 + \cdots + f_{23} \sin 345^0],$$

$$a_2 = \tfrac{1}{12} [f_1 \sin 30^0 + f_2 \sin 60^0 + \cdots + f_{23} \sin 690^0]$$

. . . .

und ganz entsprechende für $b_1, b_2, \ldots$.

Wegen der bekannten periodischen Eigenschaften der Sinus- und Kosinusfunktion kann man die hier vorkommenden Winkel auf die des ersten Quadranten 0°, 15°, 30°, 45°, 60°, 75°, 90°,

$$
(10)\quad\left\{
\begin{aligned}
12a_1 &= (f_1+f_{11}-f_{13}-f_{23})\sin 15^0+(f_2+f_{10}-f_{14}-f_{22})\sin 30^0\\
&\quad+(f_3+f_9-f_{15}-f_{21})\sin 45^0+(f_4+f_8-f_{16}-f_{20})\sin 60^0\\
&\quad+(f_5+f_7-f_{17}-f_{19})\sin 75^0+(f_6-f_{18}),\\
12a_2 &= (f_1+f_5-f_7-f_{11}+f_{13}+f_{17}-f_{19}-f_{23})\sin 30^0\\
&\quad+(f_2+f_4-f_8-f_{10}+f_{14}+f_{16}-f_{20}-f_{22})\sin 60^0\\
&\quad+(f_3-f_9+f_{15}-f_{21}),\\
12a_3 &= (f_1+f_3-f_5-f_7+f_9+f_{11}-f_{13}-f_{15}+f_{17}+f_{19}\\
&\quad-f_{21}-f_{23})\sin 45^0+(f_2-f_6+f_{10}-f_{14}+f_{18}-f_{22}),\\
12a_4 &= (f_1+f_2-f_4-f_5+f_7+f_8-f_{10}-f_{11}+f_{13}+f_{14}\\
&\quad-f_{16}-f_{17}+f_{19}+f_{20}-f_{22}-f_{23})\sin 60^0,\\
12a_5 &= (f_5+f_7-f_{17}-f_{19})\sin 15^0+(f_{10}+f_2-f_{22}-f_{14})\sin 30^0\\
&\quad+(f_{15}+f_{21}-f_3-f_9)\sin 45^0+(f_{20}+f_{16}-f_8-f_4)\sin 60^0\\
&\quad+(f_1+f_{11}-f_{13}-f_{23})\sin 75^0+(f_6-f_{18}),\\
12a_6 &= f_1-f_3+f_5-f_7+f_9-f_{11}+f_{13}-f_{15}+f_{17}-f_{19}+f_{21}-f_{23}.\\
12b_1 &= (f_1-f_{11}-f_{13}+f_{23})\cos 15^0+(f_2-f_{10}-f_{14}+f_{22})\cos 30^0\\
&\quad+(f_3-f_9-f_{15}+f_{21})\cos 45^0+(f_4-f_8-f_{16}+f_{20})\cos 60^0\\
&\quad+(f_5-f_7-f_{17}+f_{19})\cos 75^0+(f_0-f_{12}),\\
12b_2 &= (f_1-f_5-f_7+f_{11}+f_{13}-f_{17}-f_{19}+f_{23})\cos 30^0\\
&\quad+(f_2-f_4-f_8+f_{10}+f_{14}-f_{16}-f_{20}+f_{22})\cos 60^0\\
&\quad+(f_0-f_6+f_{12}-f_{18}),\\
12b_3 &= (f_1-f_3-f_5+f_7+f_9-f_{11}-f_{13}+f_{15}+f_{17}-f_{19}\\
&\quad-f_{21}+f_{23})\cos 45^0+(f_0-f_4+f_8-f_{12}+f_{16}-f_{20}),\\
12b_4 &= (f_1-f_2-f_4+f_5+f_7-f_8-f_{10}+f_{11}+f_{13}-f_{14}\\
&\quad-f_{16}+f_{17}+f_{19}-f_{20}-f_{22}+f_{23})\cos 60^0\\
&\quad+(f_0-f_3+f_6-f_9+f_{12}-f_{15}+f_{18}-f_{21}),\\
12b_5 &= (f_5-f_7-f_{17}+f_{19})\cos 15^0+(f_{10}-f_2-f_{22}+f_{14})\cos 30^0\\
&\quad+(f_{15}-f_{21}-f_3+f_9)\cos 45^0+(f_{20}-f_{16}-f_8+f_4)\cos 60^0\\
&\quad+(f_1-f_{11}-f_{13}+f_{23})\cos 75^0+(f_0-f_{12}),\\
12b_6 &= f_0-f_2+f_4-f_6+f_8-f_{10}+f_{12}-f_{14}+f_{16}-f_{18}+f_{20}-f_{22},\\
12b_0 &= \sum_{i=0}^{i=23} f_i = f_0+f_1+f_2+\cdots+f_{23}.
\end{aligned}
\right.
$$

und wenn erwünscht, sogar noch weiter reduzieren, sowie in der Rechnung mittels der Formeln für die Funktionen von Winkelsummen und Differenzen noch weitere Vereinfachungen erzielen.

Schreibt man die obigen Ausdrücke in Schlangenlinien so, daß immer Glieder untereinander kommen, für welche der Funktionswert (Sinus bzw. Kosinus) abgesehen vom Vorzeichen gleichen Wert hat, so kann man leicht zusammenfassen und erhält z. B. für die sechs ersten Koeffizienten a und b außer dem konstanten Gliede b_0 der Kosinusreihe nach J. Lahr[1]) die Werte auf S. 19.

13. Fehlerquellen bei der praktischen Fourieranalyse. Abgesehen von ihrer Unbequemlichkeit gibt die rechnerische Anwendung der Fourieranalyse oft genug Anlaß zu Bedenken bezüglich der Richtigkeit. Die Analyse ist nämlich recht labil, d. h. kleine, der oberflächlichen Betrachtung ganz entgehende Verschiedenheiten der darzustellenden Kurve bewirken, daß neue Glieder auftreten, die vorher nicht da waren, und daß die Amplituden der vorhandenen Glieder andere Werte bekommen. Solche kleinen Unterschiede sind bei jedem irgendwie aufgenommenen Kurvendiagramm vorhanden und stammen zum Teil von den Unvollkommenheiten der Registriervorrichtung, zum Teil aber von der Ungleichmäßigkeit der Schwingung selber. Schiebt man nun die bei der genauen Ausmessung zutage tretenden Verschiedenheiten von symmetrisch liegenden Ordinaten, die also eigentlich alle gleich sein sollten, auf die Ungenauigkeit des Apparates bzw. der Messung, und faßt dementsprechend diese etwas verschiedenen Ordinatenwerte zu einem Mittelwert zusammen, so kann es leicht geschehen, daß man dadurch eine vorhandene Periodizität verwischt und das Ergebnis verschlechtert statt verbessert.

Diese Gefahr besteht auch bei der Auswahl der Grundperiode, also des Intervalls, in dem man die Funktion entwickelt. Ist in dem zu analysierenden Klang die wahre Grundschwingung schwach, dagegen eine der Oberschwingungen sehr stark, so ist die Klangkurve scheinbar mit der kürzeren Periode dieser Oberschwingung periodisch. Das Bild dieser kürzeren Periode wiederholt sich (mit unwesentlichen Abweichungen) immer wieder, und der Unterschied besteht nur darin, daß es sich im Takte der längeren, wahren Grundperiode gegen die Abszissenachse etwas hebt und senkt, was man häufig erst durch sehr sorgfältige Aus-

1) Wiedem. Annalen d. Physik u. Chemie **27** (1886), 108.

messung erkennt. Das Bild der kürzeren, scheinbaren Grundperiode hat dabei tatsächlich nicht eine Gerade, sondern die der wahren Grundperiode entsprechende Sinuslinie zur Abszissenachse. Übersieht man diese längere Periodizität und bildet aus den entsprechenden Ordinaten einer Anzahl der kürzeren Perioden die Mittelwerte, so verschwindet in diesen der Einfluß der langen Periode ganz, wenn man die Anzahl der zur Mittelbildung benutzten kurzen Perioden zufällig so wählt, daß sie eine oder mehrere ganze Perioden der längeren Art ausfüllen. Denn die von der wahren Grundschwingung herrührenden Ordinatenbruchteile sind dann, da sie sich über ganze Perioden (d. h. über einen oder mehrere ganze Kreisumgänge) gleichmäßig verteilen, abwechselnd positiv und negativ, und nach ihren absoluten Werten paarweis gleich[1]), heben sich also bei der Mittelbildung gegenseitig weg. Nimmt man eine andere Anzahl der kurzen, scheinbaren Grundperiode zur Mittelwertbildung, so fällt der Einfluß der wahren Grundschwingung nicht ganz heraus und veranlaßt, daß in der Fourierentwicklung Glieder mit kürzeren Perioden, allerdings von geringer Amplitude, auftreten, die in Wirklichkeit in dem Klange gar nicht enthalten waren. Dabei braucht die Schwingung mit der längsten Periode noch gar nicht einmal von vornherein in dem untersuchten Klang enthalten zu sein; sie kann auch erst, etwa als Kombinationston (vgl. Nr. **42**), in dem Registrierapparat — gewöhnlich einer Membran mit Schreibstift oder Spiegelchen und dgl. — zu dem ursprünglich einfacheren Klang hinzugekommen zu sein. Wenn z. B. die reinen Töne g_1 und c_2 ($N = 384$ und 512 Schwingungen pro Sekunde) auf eine unsymmetrisch elastische Membran wirken, so entsteht in dieser der Differenzton c mit 128 sekundlichen Schwingungen, so daß diese Membran nunmehr einen Klang registriert mit den Schwingungsfrequenzen 128 (schwach), 384 (stark), 512 (stark), die im Verhältnis 1 : 3 : 4 stehen.

1) Diese Begründung gilt für eine gerade Anzahl innerhalb der Periode; das Ergebnis ist aber auch bei ungerader Anzahl dasselbe, denn es gilt allgemein, wenn r eine beliebige ganze Zahl ist,

$$\sin(\alpha) + \sin\left(\alpha + \frac{2\pi}{r}\right) + \sin\left(\alpha + 2\frac{2\pi}{r}\right) + \cdots$$
$$+ \sin\left(\alpha + (r-1)\frac{2\pi}{r}\right) = 0$$

und desgl. für die Kosinusfunktion.

Welchen Einfluß das Übersehen der richtigen Grundschwingung hat, davon kann man sich an einem Beispiel überzeugen, indem man einmal für eine Schwingung von bekannter Zusammensetzung die Ordinaten berechnet und dann zusieht, was herauskommt, wenn man nach einer der kürzeren Perioden zu entwickeln sucht.

Beispiel: Es sei

$$(11)\quad \begin{cases} f(x) = A_1 \sin \frac{\pi x}{L} + A_3 \sin \frac{3\pi x}{L} + A_6 \sin \frac{6\pi x}{L} \\ \quad = \sin \frac{\pi x}{L} + 50 \sin \frac{3\pi x}{L} + 10 \sin \frac{6\pi x}{L}. \end{cases}$$

Dies ist eine Schwingung, bestehend aus Grundton mit Amplitude $A_1 = 1$, 2. Oberton (Duodezime oder Quint der Oktave) mit Amplitude $A_3 = 50$, und 5. Oberton (Quint der Doppeloktave) mit Amplitude $A_6 = 10$; sie wird z. B. durch den Klang c, c_1 g_2 dargestellt. Teilt man die Periode der Grundschwingung $2L$ in 72 gleiche Teile, so entspricht jeder einem Bogen von 5^0 im Argument des Sinus der Grundschwingung. Berechnet man, immer um diesen Betrag fortschreitend, die Ordinaten von $f(x)$ nach (11), so erhält man folgende kleine Tabelle 1, die graphisch in Fig. 4 (S. 24) wiedergegeben ist; für $\frac{\pi x}{L}$ ist dabei α gesetzt.

Die sorgfältig gezeichnete Kurve mit ihrem glatten Verlauf läßt auf den ersten Anblick das Vorhandensein dreier Komponenten nicht ahnen. Daß sie keine reine Sinuskurve ist, ergibt sich aus der leichten Unsymmetrie des Anstiegs und Abfalls, die beim oberflächlichen Ausmessen sofort zutage tritt. Daß aber eine merkliche langsamere Schwingung mit dem Dreifachen der scheinbaren Periode darin enthalten ist, macht sich nur außerordentlich wenig bemerkbar. Wie die Kurve mit Weglassung dieser wahren, aber schwachen Grundschwingung aussehen würde, ist durch die gestrichelten Kurvenstücke in den Spitzen, wo der Unterschied allein merkbar wird, dargestellt, und zwar aus zeichnerischen Gründen schon etwas übertrieben.

Soll man umgekehrt diese Kurve analysieren, so wird man leicht die wahre (längere) Periodizität $2L$ übersehen und statt dessen die mehr ins Auge fallende kürzere Scheinperiodizität $2l = \frac{2L}{3}$ als Grundperiode wählen. Mißt man in dieser je 24 Ordinaten und faßt zufälligerweise 3 oder 6 oder 9 usw. von diesen Scheinperioden zur Mittelbildung zusammen, so erhält man, wie

Tabelle 1.

Ordinaten der Schwingungen $\varphi(x) = 50 \sin 3\alpha + 10 \sin 6\alpha$
und $f(x) = \sin\alpha + 50 \sin 3\alpha + 10 \sin 6\alpha$;
von 5 zu 5 Bogengraden des Argumentes $\alpha = \frac{\pi x}{L}$ fortschreitend.

α	$\varphi(x) = 50\sin 3\alpha + 10\sin 6\alpha$	α	$f(x) = \sin\alpha + 50\sin 3\alpha + 10\sin 6\alpha$	α	$f(x) = \sin\alpha + 50\sin 3\alpha + 10\sin 6\alpha$	α	$f(x) = \sin\alpha + 50\sin 3\alpha + 10\sin 6\alpha$
0°	0	0°	0	120°	+ 0,8660	240°	− 0,8660
5	+ 27,9409	5	+ 28,0281	125	28,7601	245	+ 27,0346
10	33,6603	10	33,8339	130	34,4263	250	32,7206
15	45,3553	15	45,6141	135	46,0624	255	44,3894
20	51,9616	20	52,3036	140	52,6044	260	50,9768
25	53,2963	25	53,7189	145	53,8699	265	52,3001
30	50,0000	30	50,5000	150	50,5000	270	49,0000
35	43,2963	35	43,8699	155	43,7189	275	42,3001
40	34,6410	40	35,2838	160	34,9830	280	33,6562
45	25,3553	45	26,0624	165	25,6141	285	24,3894
50	16,3397	50	17,1057	170	16,5133	290	15,4000
55	+ 7,9409	55	8,7601	175	+ 8,0281	295	+ 7,0346
60	0	60	+ 0,8660	180	0	300	− 0,8660
65	− 7,9409	65	− 7,0346	185	− 8,0281	305	− 8,7601
70	− 16,3397	70	− 15,4000	190	− 16,5133	310	− 17,1057
75	− 25,3553	75	− 24,3894	195	− 25,6141	315	− 26,0624
80	− 34,6410	80	− 33,6562	200	− 34,9830	320	− 35,2838
85	− 43,2963	85	− 42,3001	205	− 43,7189	325	− 43,8699
90	− 50,0000	90	− 49,0000	210	− 50,5000	330	− 50,5000
95	− 53,2963	95	− 52,3001	215	− 53,8699	335	− 53,7189
100	− 51,9616	100	− 50,9768	220	− 52,6044	340	− 52,3036
105	− 45,3553	105	− 44,3894	225	− 46,0624	345	− 45,6141
110	− 33,6603	110	− 32,7206	230	− 34,4263	350	− 33,8339
115	− 27,9409	115	− 27,0346	235	− 28,7601	355	− 28,0281
120	0	120	+ 0,8660	240	− 0,8660	360	0
1	2	3	4	5	6	7	8

bei der Anordnung der Tabelle leicht ersichtlich, genau dieselben Werte, wie wenn

$$f(x) = 50 \sin \frac{3\pi x}{L} + 10 \sin \frac{6\pi x}{L} = 50 \sin \frac{\pi x}{l} + 10 \sin \frac{2\pi x}{l}$$

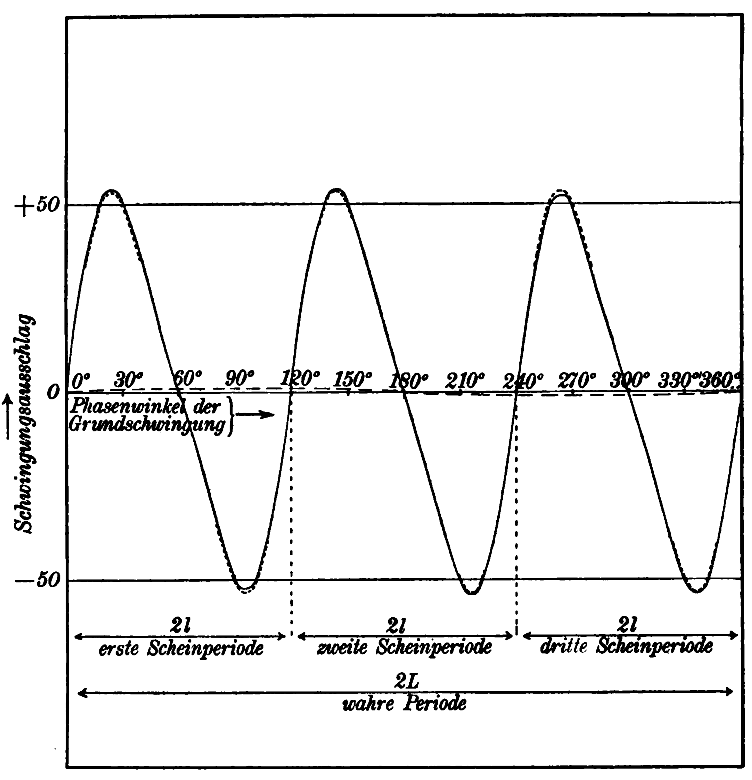


Fig. 4.

Ausgezogene Kurve ———: Zusammengesetzte Schwingung $f(x) = \sin \frac{\pi x}{L} + 50 \sin \frac{3\pi x}{L} + 10 \sin \frac{6\pi x}{L}$ der Periode $2L$ mit schwacher Grundschwingung.

Gestrichelte Kurve — — — —: Grundschwingung $\sin \frac{\pi x}{L}$.

Punktierte Kurve ··········: Zusammengesetzte Schwingung $\varphi(x) = 50 \sin \frac{\pi x}{l} + 10 \sin \frac{2\pi x}{l}$ mit Periode $2l = \frac{2L}{3}$.

wäre, d. h. wie wenn die Schwingung nur aus einem Grundton mit der Periode $2l$ und seiner Oktave bestände.

Bei der Mittelbildung aus 2 oder 5 oder 8 usw. bzw. 1 oder 4 oder 7 usw. Scheinperioden ergeben sich abweichende Werte, die offenbar das Auftreten höherer Glieder der Fourierreihe und

somit eine unrichtige Analyse des vorliegenden ziemlich einfachen Klanges bewirken.

Es mögen beispielsweise die Mittelwerte der Ordinaten aus 1 oder 4 oder 7 usw. Scheinperioden benutzt werden, um mittels der Gl. (10) von Nr. **12** die Glieder der Reihenentwicklung zu berechnen. Diese 24 Ordinatenwerte sind die in der Kolumne 4 der Tabelle 1 enthaltenen, zu den Argumenten $\alpha = 0$ bis $\alpha = 115^0$ gehörigen Werte. Die Rechnung ergibt für die Amplitudenkoeffizienten a und b bzw. die nach Nr. **10** (4) aus ihnen folgenden Amplituden A und Phasenkonstanten ϑ nachstehende Werte:

	$b_0 = +1{,}395$		$A_0 = 0{,}698$
$a_1 = 50{,}123$	$b_1 = -0{,}216$	$\vartheta_1 = -\ 15'$	$A_1 = 50{,}123$
$a_2 = 10{,}695$	$b_2 = -0{,}078$	$\vartheta_2 = -\ 25'$	$A_2 = 10{,}695$
$a_3 = 1{,}090$	$b_3 = -0{,}055$	$\vartheta_3 = -2^0 53'$	$A_3 = 1{,}091$
$a_4 = 1{,}380$	$b_4 = -0{,}046$	$\vartheta_4 = -1^0 55'$	$A_4 = 1{,}381$
$a_5 = 1{,}563$	$b_5 = -0{,}043$	$\vartheta_5 = -1^0 36'$	$A_5 = 1{,}563$
$a_6 = 1{,}630$	$b_6 = -0{,}041$	$\vartheta_6 = -1^0 27'$	$A_6 = 1{,}631$

somit statt $f(x) = \sin\frac{\pi x}{l} + 50 \sin\frac{3\pi x}{L} + 10 \sin\frac{6\pi x}{L}$ die unrichtige Entwicklung:

$$\begin{aligned}\Psi(x) = 0{,}698 &+ 50{,}123 \sin\left(\frac{\pi x}{l} - 15'\right) + 10{,}695 \sin\left(\frac{2\pi x}{l} - 25'\right)\\ &+ 1{,}091 \sin\left(\frac{3\pi x}{l} - 2^0 53'\right) + 1{,}381 \sin\left(\frac{4\pi x}{l} - 1^0 55'\right)\\ &+ 1{,}563 \sin\left(\frac{5\pi x}{l} - 1^0 36'\right) + 1{,}631 \sin\left(\frac{6\pi x}{l} - 1^0 27'\right) + \cdots.\end{aligned}$$

Auch die folgenden Koeffizienten a_7 usw. sind von Null verschieden. Man erhält also statt des einen unterdrückten Gliedes viele Glieder anderer Frequenzen mit Amplituden von gleicher Größenordnung wie derjenigen des weggefallenen Gliedes, und außerdem Änderung der Amplituden der beiden zurückbleibenden Glieder im Höchstbetrage von 7% (10,695 statt 10).

3. Kapitel.

Musikalische Gliederung des Tonbereichs.

14. Klänge und Töne, Intensität, Höhe und Klangfarbe. Zur Erleichterung der Ausdrucksweise werden gelegentlich die in der Musik üblichen Bezeichnungen benutzt werden. Deshalb

soll hier eine kurze Übersicht über das Wichtigste aus der musikalischen Akustik gegeben werden.

Die Gehörsempfindungen scheiden sich in Töne oder (in der Helmholtzschen Bezeichnungsweise) Klänge und Geräusche. Bei den Geräuschen lassen sich zwar auch verschiedene Arten erkennen, doch ist die Theorie derselben überhaupt kaum entwickelt und sehr unsicher, so daß wir sie hier außer acht lassen werden. Die Klänge oder, im gewöhnlichen Sprachgebrauch, Töne sind charakterisiert durch drei Qualitäten oder Eigenschaften: 1. ihre Stärke oder Intensität, 2. ihre Höhe (frz. hauteur, engl. pitch), 3. ihre Klangfarbe (frz. timbre, engl. quality). Die Tonhöhe hängt ab von der Schwingungsdauer oder Periode bzw. der Schwingungszahl oder Frequenz; hohe Töne entsprechen Schwingungen von kurzer Periode (großer Frequenz), tiefe Töne solchen von langer Periode (kleiner Frequenz). Die musikalische Kennzeichnung eines Tones durch seine Höhe und die physikalische durch seine Frequenz sind daher in gewissem Sinne gleichwertig.

Die Klangfarbe eines Klanges (Tones) gegebener Höhe wird, wie Helmholtz gezeigt hat, durch das Mitklingen gewisser höherer Töne, Obertöne bedingt, die zusammen mit dem für das Ohr die Tonhöhe bestimmenden tiefsten Ton, dem Grundton, den Klang bilden. Fast alle, vielleicht sogar überhaupt alle musikalisch benutzten Töne sind so aus Teiltönen oder Partialtönen zusammengesetzt, also eigentlich als Klänge zu bezeichnen. Geübte Ohren können häufig die einzelnen Teiltöne aus einem Klange heraushören, wenn die Aufmerksamkeit darauf gerichtet wird; die verschiedene Klangfarbe von Tönen gleicher Höhe, die von verschiedenen Musikinstrumenten stammen (z. B. Cello, Geige, Klarinette, Trompete usw.) wird aber auch von ungeübten Ohren ohne weiteres wahrgenommen. Stehen die Schwingungszahlen der Partialtöne in den einfachen Zahlenverhältnissen 1:2:3:4 usw., so nennt man die Töne harmonische, andernfalls unharmonische.

Die Tonintensität beruht auf der Stärke, mit der das Ohr von der Schwingung beeinflußt wird; sie geht unter sonst gleichen Umständen der Energie und damit der Amplitude der Schwingung bzw. der auf das Ohr auffallenden Welle parallel. Die physiologische Tonintensität, d. h. die Stärke der Gehörsempfindung, braucht aber keineswegs der physikalischen Tonintensität, d. h. der Stärke des äußeren Reizes, die in einfacher Weise von der Amplitude der auffallenden Welle abhängt, proportional oder gar

gleich zu sein, und ist es auch in vielen Fällen sicher nicht. Die Besprechung dieser interessanten Beziehungen gehört aber nicht hierher.

Die einfachen Töne, d. h. Klänge ohne Obertöne, entsprechen offenbar möglichst einfachen Schwingungsformen. Als solche nimmt man aus bestimmten Gründen die Sinus- bzw. Kosinusform, so daß also die Gleichungen (2) bzw. (3) in Nr. 5 sowie die Gleichungen (7) in Nr. 8 einem einfachen Ton entsprechen. Die Erfahrung zeigt, daß Körper, wie Stimmgabeln, die nahezu sinusförmig schwingen, besonders reine und obertönarme Klänge geben, wodurch sich die obige Wahl der Sinusfunktion rechtfertigt.

15. Einteilung des Tonbereichs. Intervalle, Oktaventeilung. Physikalisch sind alle kontinuierlich aufeinanderfolgenden Frequenzen gleichberechtigt. In der Musik kann man aber aus ästhetischen Gründen keine kontinuierliche Änderung der Tonhöhe gebrauchen, sondern muß sie sprungweise vornehmen. Der Ausgangston kann dabei ganz beliebig sein. Als brauchbar haben sich nur ganz bestimmte Schritte von einem Ton zu anderen Tönen erwiesen, die man als musikalische Intervalle oder Tonintervalle bezeichnet. Ihre Größe richtet sich nach dem mehr oder weniger angenehmen Eindruck, den das Nacheinandererklingen, ganz besonders aber der Zusammenklang zweier Töne verschiedener Höhe erzeugt. Der Eindruck geht von der angenehmen Empfindung des vollen Wohlklanges (vollkommener Konsonanz) durch verschiedene Abstufungen bis zum starken Mißklang (vollkommener Dissonanz). Diese Einteilung beruht also auf einem rein psychologischen Moment, zu welchem das schon Pythagoras bekannte physikalische Gesetz der einfachen Verhältnisse der Schwingungszahlen in eigenartiger Parallelbeziehung steht, das aber durch dieses Gesetz keineswegs erklärt wird. Die physikalische Erklärung der Konsonanz beim Zusammenklingen von Tönen mit einfachem Schwingungszahlenverhältnis, der Dissonanz bei solchen mit komplizierterem Verhältnis, hat Helmholtz durch Heranziehung der Schwebungen oder Stöße zu geben versucht, d. h. der unter Umständen auftretenden mehr oder weniger schnellen Intensitätsschwankungen eines Tones, die auf das Ohr ähnlich unangenehm wirken wie das Flackern einer Lichtquelle auf das Auge.

Die vollkommenste Konsonanz nächst dem Einklang (Unisono), d. h. dem Zusammenklingen zweier gleich hoher Töne, gibt ein Intervall, dessen Töne in dem Schwingungszahlenverhältnis

1 : 2 stehen, gleichgültig, welches die absolute Größe der Schwingungszahl ist. Bei diesem Intervall erscheint der höhere Ton dem Ohr gewissermaßen nur als die höhere Wiederholung des tieferen und umgekehrt, so daß beide in gewissem Sinne als ein und derselbe Ton bezeichnet werden können und in der musikalischen Zeichensprache, den Noten, auch bezeichnet werden. Der höhere der beiden Töne wird als die Oktave des tieferen, Prim oder Prime genannten Tones bezeichnet, weil zur Ausfüllung dieses großen Intervalles zwischen beide noch 6 Töne eingeschaltet werden, so daß die Oktave der achte Ton, vom Grundton aus gerechnet, ist. Diese Zwischentöne heißen Sekunde, Terz, Quarte, Quinte, Sexte, Septime und stehen mit dem Grundton, der Prime, daher auch untereinander, in bestimmten einfachen Schwingungszahlenverhältnissen. Die sieben Töne von der Prime bis zur Septime bilden die diatonische Tonleiter oder Skala, die also das Intervall einer Oktave, oder kürzer, eine Oktave umfaßt. Dieselbe Tonleiter wiederholt sich in der nächsthöheren Oktave, in der einfach alle Schwingungszahlen verdoppelt erscheinen, in der darauffolgenden Oktave, wo sie gegen die vorhergehende wieder verdoppelt, gegen die Ausgangsoktave also vervierfacht sind, und so weiter; ebenso in der nächsttieferen Oktave, wo die Schwingungszahlen die Hälfte von derjenigen der Ausgangsoktave sind, und so fort. Der ganze Tonbereich wird auf diese Weise in Oktaven und innerhalb jeder Oktave wieder in kleinere Intervalle geteilt. Zur bequemeren Bezeichnung wird die Zählung der Tonschritte noch über die Oktave hinaus fortgesetzt, indem die Sekunde, Terz, Quarte, Quinte der nächsten Oktave als None, Dezime, Undezime, Duodezime bezeichnet werden.

16. Physikalische und internationale Stimmung. Die Töne einer Oktave werden mit Buchstaben bezeichnet. Als Fundamentalton der Oktaventeilung gilt das c, dem ein Ton von bestimmter Schwingungszahl entspricht. Die verschiedenen Oktaven werden durch große und kleine Buchstaben und durch Zufügung von Indizes unterschiedeu. In der sogenannten physikalischen oder mathematischen Stimmung (franz. échelle, engl. pitch) sind die Schwingungsfrequenzen aller c ganzzahlige Potenzen von 2 (vgl. Tabelle 2). Bei Zugrundelegung des eingestrichenen a' mit 435 Schwingungen pro Sekunde als internationalen Stimmtons werden die Schwingungszahlen der c etwas andere. Die Tabelle 2 enthält auch diese Werte für den Fall der sogenannten

Tabelle 2.

Oktavenbezeichnung und Schwingungszahlen der c.

Oktave	Alte (deutsche Bezeichnung)	Neue (deutsche Bezeichnung)		Französische Bezeichnung	Frequenz (Schwingungszahl) (v. d.) in physikalischer Stimmung	Frequenz (v. d.) in internationaler gleichschwebender Stimmung ($a_1 = 435$)
Subkontra	$C_{,,}(\underline{\underline{C}})$	$C_{-2}(C_2)$	c^{-3}	$ut_{-1}\,(Ut)$	16	16,17
Kontra	$C_{,}(\underline{C})$	$C_{-1}(C_1)$	c^{-2}	$ut_0\,(ut)$	32	32,33
große	C	C	c^{-1}	ut_1	64	64,66
kleine	c	c	c^0	ut_2	128	129,3
1 gestr.	$c'(\overline{c})$	c_1	c^1	ut_3	256	258,7
2 gestr.	$c''(\overline{\overline{c}})$	c_2	c^2	ut_4	512	517,3
3 gestr.	$c'''(\overline{\overline{\overline{c}}})$	c_3	c^3	ut_5	1024	1035
4 gestr.	$c''''(\overline{\overline{\overline{\overline{c}}}})$	c_4	c^4	ut_6	2048	2069
5 gestr.	.	c_5	c^5	ut_7	4096	4138
6 gestr.	.	c_6	c^6	ut_8	8192	8275
7 gestr.	.	c_7	c^7	ut_9	16384	16550
1	2	3	4	5	6	7

gleichschwebenden Temperatur (vgl. Nr. **21**). Sie zeigt zugleich die verschiedenartige Bezeichnung der Oktaven, die nebeneinander vorkommen; ut ist die bei den romanischen Völkern gebräuchliche Bezeichnung unseres c.

Im deutschen Sprachgebiet sind also nebeneinander vier Bezeichnungsweisen in Gebrauch, die sich in der höheren Tonregion nur durch Form oder Stellung des Index unterscheiden, in der tieferen aber auch in bezug auf den Wert des Index abweichen. Ähnliches gilt hier für die französische Benennung, denn von manchen Autoren (z. B. R. Koenig u. a.) wird ut_{-1} statt ut_0 oder ut, und ut_{-2} statt ut_{-1} oder Ut gesetzt. Es herrscht da also ziemliche Verwirrung, und eine sichere Kennzeichnung ist nur durch Angabe der Frequenz möglich; dabei muß man aber noch darauf achten, ob sich diese auf ganze Schwingungen (v. d.)[1]) oder auf halbe (einfache) Schwingungen (v. s.) bezieht, welch letztere Bezeichnung in Frankreich üblich ist und für die alle Schwingungszahlen doppelt so groß sind. Ganz zu verwerfen ist es aber, wenn gar die französische Indexzählung der 3. Spalte an das (deutsche) c angehängt wird, wie es zuweilen geschieht. Jedenfalls ist die physikalische Kennzeichnung eines Tones durch Frequenz bzw. Wellenlänge [vgl. Nr. **6**, Gleichung (4)] die einzig sichere.

17. Tonleiter und Benennung der Töne. Natürliche diatonische Dur- und Mollskala. Pythagoreische Skala. Die Unterteilung der Oktave in sieben Stufen erfolgt in der Tonleiter oder Skala (frz. gamme, engl. scale), und zwar in unserem modernen Musiksystem in zweierlei Art: 1. als natürliche diatonische Durtonleiter, 2. als natürliche diatonische Molltonleiter. Bei letzterer sind die Intervalle der Terz, der Sexte und der Septime von derjenigen der Durskala verschieden. Diese Leitern werden beim harmonischen Zusammenspiel von Instrumenten mit variablen Tönen (Orchester) benutzt. Daneben existiert von alters her 3. die griechische Pythagoreische Tonleiter, ebenfalls diatonisch, d. h. siebenstufig. Bei ihr sind Terz, Sext und Septime von denen der natürlichen Dur- und Mollskala verschieden. Nach Versuchen von Cornu u. a. soll diese aus dem Quintenzirkel hervorgegangene Skala von guten Geigenspielern und Sängern, wenn sie ohne harmonische Begleitung spielen bzw. singen, tatsächlich sehr annähernd innegehalten wer-

1) Vgl. Nr. **3**, S. 3.

den. Auf andere ebenfalls mögliche diatonische Skalen können wir hier nicht eingehen.

Tabelle 3. Natürliche diatonische C-durskala.

Name des Intervalls	Prim	Sekunde	(große) Terz	Quart	Quint	(große) Sext	(große) Septime	Oktave
Ton	c_1	d_1	e_1	f_1	g_1	a_1	h_1	c_2
Frequenz	256	288	320	$341\frac{1}{3}$	384	$426\frac{2}{3}$	480	512
Schwingungsdifferenz benachbarter Töne		32	32	$21\frac{1}{3}$	$42\frac{2}{3}$	$42\frac{2}{3}$	$53\frac{1}{3}$	32
Intervall gegen den Grundton (Prim)	1	$\frac{9}{8}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{15}{8}$	2
Intervall benachbart. Töne		$\frac{9}{8}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{16}{15}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{16}{15}$

Da die musikalischen Intervalle physikalisch durch die Verhältnisse der Schwingungszahlen ausgedrückt werden, so lassen sich die Tonleitern ohne Beziehung auf einen Grundton bestimmter Höhe einfach mittels dieser Verhältniszahlen darstellen; anschaulicher aber wird es, wenn man die Bezeichnung durch Buchstaben hinzunimmt, durch die zugleich die absolute Tonhöhe mit angegeben wird. Man erhält dann freilich die Skala nur für einen besonderen Fall, nämlich für den gegebenen Ausgangston.

Man geht aus von einem Tone c. Die Töne der zugehörigen diatonischen Durskala sind c d e f g a h c, diejenigen der diatonischen Mollskala c d es f g as b c, in romanischer Bezeichnung ut (do), re, mi, fa, sol, la, si, ut bzw. ut, re, mi♭, fa, sol, la♭, si♭, ut.[1]) Zur Unterscheidung nennt man die Terz, Sext und Septime der Durskala „große", diejenigen der Mollskala „kleine", Sext und Septime der letzteren wohl auch „verminderte". Die Töne der Pythagoreischen Skala werden wie diejenigen der Durskala mit c d e f g a h c bezeichnet. Zur Unterscheidung der abweichenden Terz, Sext, Septime fügt man entweder als Index das Intervall hinzu, um das sich der eine nach oben (+), oder nach unten (—) in der Tonhöhe von dem gleichbenannten Ton der anderen Skala unterscheidet, oder man läßt in der Bezeichnungsweise des Musiktheoretikers Moritz Hauptmann die Pythagoreischen, durch Quintenfolge erhaltenen Töne ohne Index und unterstreicht die von ihnen abweichenden der anderen Leitern, die große Terzen

1) Beim Singen wird do statt ut benutzt. — Im niederländischen und englischen Sprachgebiet wird unser h b, unser b bes genannt.

bilden. Diese Bezeichnung ist jedoch nicht allgemein angenommen. Die Tabellen 3 bis 5 geben die diatonische natürliche Dur-, natürliche Moll- und die Pythagoreische Skala für den Grundton c_1 in physikalischer Stimmung. Sie enthalten auch noch die Differenzen der Schwingungszahlen benachbarter Töne und ihre Intervalle, d. h. die Verhältnisse ihrer Schwingungszahlen. Die Tabellen bleiben für alle Oktaven richtig, wenn man nur die Zahlen der Zeilen 3 und 4 (die Frequenzen und ihre Differenzen) mit der entsprechenden Potenz von 2 multipliziert oder dividiert.

Tabelle 4. Natürliche diatonische C-mollskala.

Name des Intervalls	Prim	Sekunde	(kleine) Terz	Quart	Quint	(kleine) Sext	(kleine) Septime	Oktave
Ton	c_1	d_1	es_1	f_1	g_1	as_1	b_1	c_2
Frequenz	256	288	$307\frac{1}{5}$	$341\frac{1}{3}$	384	$409\frac{3}{5}$	$460\frac{4}{5}$	512
Schwingungsdifferenz benachbarter Töne		32	$19\frac{1}{5}$	$34\frac{2}{15}$	$42\frac{2}{3}$	$25\frac{3}{5}$	$51\frac{1}{5}$	$51\frac{1}{5}$
Intervall gegen den Grundton (Prim)	1	$\frac{9}{8}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{9}{5}$	2
Intervall benachbart. Töne		$\frac{9}{8}$	$\frac{16}{15}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{16}{15}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{10}{9}$

Tabelle 5. Pythagoreische diatonische C-Skala.

Name des Intervalls	Prim	Sekunde	(Pythag.) Terz	Quart	Quint	(Pyth.) Sext	(Pyth.) Septime	Oktave
Ton	c_1	d_1	e_1	f_1	g_1	a_1	h_1	c_2
Frequenz	256	288	324	$341\frac{1}{3}$	384	432	486	512
Schwingungsdifferenz benachbarter Töne		32	36	$17\frac{1}{3}$	$42\frac{2}{3}$	48	54	26
Intervall gegen den Grundton (Prim)	1	$\frac{9}{8}$	$\frac{81}{64}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{27}{16}$	$\frac{243}{128}$	2
Intervall benachbart. Töne		$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{256}{243}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{256}{243}$

18. Intervalle der Tonleitern. Ganzton, Halbton, Komma. Die einzelnen Nachbarintervalle sind verschieden groß. Das Intervall $\frac{9}{8}$, z. B. von d gegen c oder von g gegen f heißt großer Ganzton, das etwas kleinere Intervall $\frac{10}{9}$, z. B. von e gegen d oder von f gegen es, kleiner Ganzton, das erheblich kleinere $\frac{16}{15}$, z. B. von f gegen e oder von es gegen d, großer Halbton. Das Intervall der großen Terz der Durskala zur kleinen Terz der Mollskala, e gegen es, beträgt $e : es = \frac{5}{4} : \frac{6}{5} = \frac{25}{24}$ und heißt

kleiner Halbton. Dasselbe Intervall ist zwischen großer und kleiner Sext a und as vorhanden. Die abweichenden Intervalle $\frac{27}{25}$ zwischen kleiner Septime b und großer Sext a, sowie $\frac{75}{72}$ zwischen großer und kleiner Septime h und b haben keine besonderen Namen. Das Intervall $\frac{256}{243}$ zwischen Quart f und Pythagoreischer Terz e, sowie zwischen Oktave c und Pythagoreischer Septime h heißt Pythagoreischer Halbton oder Limma. Der Unterschied zwischen Pythagoreischer Terz und großer Terz, welch letztere etwas tiefer ist, also das Intervall $e : \underline{e} = \frac{81}{64} : \frac{5}{4} = \frac{81}{80}$ und ebenso das der Pythagoreischen Sexte zur großen Sexte $a : \underline{a} = \frac{27}{16} : \frac{5}{3} = \frac{81}{80}$ heißt syntonisches Komma. Es gilt oft als vom Ohre nicht mehr recht wahrnehmbar; daher wird der Unterschied zweier um 1 Komma getrennter Töne häufig vernachlässigt. Das syntonische Komma tritt auch bei der Bildung der enharmonischen natürlichen Leitern auf, die dadurch entstehen, daß man die natürliche Dur- bzw. Mollskala von anderen Tönen der Oktave aus aufbaut und dadurch die Zahl der Töne innerhalb der Oktave vermehrt (vgl. Nr. **20**). Die eben besprochenen Intervalle nebst dem später zu besprechenden Pythagoreischen oder ditonischen Komma und gleichschwebenden Halbton sind in Tabelle 6 zusammengestellt.

Tabelle 6.

Großer Ganzton	$\frac{9}{8} = \frac{10}{9} \cdot \frac{81}{80} =$ kleiner Ganzton + synt. Komma
Kleiner Ganzton	$\frac{10}{9} = \frac{16}{25} \cdot \frac{25}{24} =$ großer Halbton + klein Halbton
Großer Halbton	$\frac{16}{15}$
Kleiner Halbton	$\frac{25}{24}$
Syntonisches Komma......	$\frac{81}{80}$
Ditonisches (Pythagoreisches) Komma	$\frac{74}{73}$ (genauer $\frac{531441}{524288}$)
Gleichschwebender Halbton	$\sqrt[12]{2} = 1{,}05946$

19. Theoretischer Aufbau der drei Tonleitern. Die beiden natürlichen Skalen lassen sich am einfachsten aufbauen, wenn man von dem Zusammenklang je dreier ihrer Töne, d. h. einem Akkord (frz. accord, engl. chord) ausgeht. Bei der Durskala bilden die Töne $c_1\ e_1\ g_1$, $f_1\ a_1\ c_2$, $g_1\ h_1\ d_2$ je einen gleich gebauten Akkord, nämlich den Durakkord (Durdreiklang). Die Intervalle dieser drei auf verschiedenen Grundtönen (c_1, f_1, g_1)

aufgebauten Akkorde sind dieselben, denn die Schwingungszahlenverhältnisse der drei Töne untereinander sind in allen drei Fällen die gleichen, wie aus Tabelle 3 sofort folgt. Es ist nämlich

$$1 : \tfrac{5}{4} : \tfrac{3}{2} = \tfrac{4}{3} : \tfrac{5}{3} : 2 = \tfrac{3}{2} : \tfrac{15}{8} : \tfrac{18}{8} = 4 : 5 : 6$$

$$c_1 : e_1 : g_1 \quad f_1 : a_1 : c_2 \quad g_1 : h_1 : d_2$$

Das Analoge gilt für die natürliche diatonische Mollskala, wo die drei **Mollakkorde** c_1 es_1 g_1, f_1 as_1 c_2, g_1 b_1 d_2 sämtliche Töne der Skala enthalten, wenn man wieder statt des Tones d_2 seine tiefere Oktave d_1 in die Skala einfügt.

Es ist hier

$$1 : \tfrac{6}{5} : \tfrac{3}{2} = \tfrac{4}{3} : \tfrac{8}{5} : 2 = \tfrac{3}{2} : \tfrac{9}{5} : \tfrac{18}{8} = 10 : 12 : 15$$

$$c_1 \; es_1 \; g_1 \quad f_1 \; as_1 \; c_2 \quad g_1 \; b_1 \; d_2 .$$

Die Grundtöne der drei angeführten Akkorde sind der Fundamentalton der Skala c_1 und ihre tiefere (f) und höhere (g_1) Quint; Grundton, höhere und tiefere Quint werden deshalb auch besonders benannt als **Tonika**, **Dominante** und **Subdominante**.

Die Akkorde mit dem Schwingungszahlenverhältnis 4 : 5 : 6 und 10 : 12 : 15 sind charakteristisch für die natürliche Dur- bzw. Mollskala. Andere Anordnung ihrer Töne, z. B. e_1 g_1 c_2 mit dem Schwingungszahlenverhältnis 5 : 6 : 8, g_1 c_2 e_2 mit dem Verhältnis 6 : 8 : 10 oder 3 : 4 : 5 usw. sind die sogenannten **Umkehrungen** der Grundakkorde.

Diese Akkorde sind die wohlklingendsten, sie geben die beste Konsonanz; daher sind die beiden natürlichen Skalen die Skalen der **harmonischen** (vielstimmigen) Musik.

Die Pythagoreische Skala entbehrt dieses Vorzugs, ihre entsprechenden Dreiklänge

$$c_1 : e_1 : g_1 = 1 : \frac{81}{64} : \frac{3}{2} = 64 : 81 : 96$$

$$f_1 : a_1 : c_2 = \frac{4}{3} : \frac{27}{16} : 2 = 64 : 81 : 96$$

$$g_1 : h_1 : d_2 = \frac{3}{2} : \frac{243}{128} : \frac{18}{8} = 64 : 81 : 96$$

haben viel kompliziertere Schwingungszahlverhältnisse und sind weniger wohlklingend. Dafür ist der Skalenaufbau einfacher; das Intervall je zweier benachbarter Töne ist bei fünf Schritten gleich, nämlich gleich $\frac{9}{8}$; bei den beiden anderen Schritten zwar ab-

weichend, aber wieder für sich gleich ($\frac{256}{243}$). Diese Skala eignet sich deshalb sehr für die rein melodische (einstimmige, homophone) Musik, bei der nur ein Fortschreiten von Ton zu Ton, kein Nebeneinandererklingen vorkommt. Sie wird erhalten, indem man vom Fundamentalton nach oben und nach unten in Quintenschritten (Intervall $\frac{3}{2}$ bzw. $\frac{2}{3}$) fortschreitet und die so gewonnenen Töne in dieselbe Oktave versetzt. Für die sieben Töne der diatonischen Leiter braucht man fünf Schritte nach oben und einen nach unten.

20. Vermehrung der Töne in der Oktave. Enharmonische Töne. Chromatische Skala. Die in den diatonischen Leitern enthaltenen Töne reichen nicht aus, wenn man von jedem ihrer Töne als Fundamentalton ausgehend eine gleich gebaute diatonische Leiter aufstellen, d. h. die Skala in eine andere Tonart, z. B. G-Dur, F-Moll usw., übertragen will (Modulation und Transposition). Um z. B. von der Quinte g aus eine natürliche diatonische Durskala aufzubauen, braucht man folgende Töne, deren Intervalle gegen g und gegen c angegeben sind.

Tabelle 7. Natürliche diatonische G-Durskala.

	Prim	Sekunde	(große) Terz	Quart	Quint	(große) Sext	(große) Septime	Oktave
	g	$\bar{a}$	h	c	d	e	fis	g_1
Intervall gegen g	1	$\frac{9}{8}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{15}{8}$	2
Intervall gegen c	$\frac{3}{2}$	$\frac{27}{16}$	$\frac{15}{8}$	2	$2\times\frac{9}{8}$	$2\times\frac{5}{4}$	$2\times\frac{45}{32}$	$2\times\frac{3}{2}$

Hier sind identisch mit Tönen der C-Durskala die Töne c d e g h, fast identisch $\bar{a}$, dessen Unterschied gegen das a der C-Durskala gleich 1 Komma (Intervall $\frac{81}{80}$) ist, denn $\frac{27}{16} = \frac{5}{3} \cdot \frac{81}{80}$; ganz abweichend und zwischen f und g der C-Skala fallend ist der neue Ton fis mit Intervall $\frac{45}{32}$ gegen c.

Bei der entsprechenden Skala von der zweiten Quinte d aus werden die Abweichungen noch zahlreicher.

Indem man so weitergeht und auch noch die in den Molltonleitern vorhandenen abweichenden Töne b, es, as usw. zu Fundamentaltönen von Durskalen macht, und umgekehrt auf allen so erhaltenen Tönen auch Mollskalen aufbaut, kommt man zu immer neuen Tönen, die sich in großer Zahl zwischen die Töne der diatonischen C-Durskala einschieben. Einige von ihnen fallen nahe zusammen mit den ursprünglichen Tönen jener Skala, andere

liegen mitten zwischen zwei von ihnen. Man bezeichnet letztere durch den nächst tieferen Ton, von dem sie gewissermaßen durch Erhöhung abgeleitet werden, mittels Anhängung der Endsilbe **is**, z. B. fis, cis, gis, dis, ais, eis, his, und nennt sie einfach erhöhte Töne. Die von ihnen durch weitere einfache Erhöhung abgeleiteten, welche größtenteils mit den ursprünglichen diatonischen Tönen nahe zusammenfallen, heißen doppelt erhöhte und werden als fisis, cisis usw. bezeichnet. Durch entsprechende Beziehung neu hinzukommender Töne auf den nächst höheren erhält man die einfach und die doppelt vertieften Töne, bezeichnet durch Anhängung der Endsilbe **es** bzw. **eses**. Statt hes sagt man jedoch b, und bei den von a und e abgeleiteten Tönen as und es wird der Buchstabe e der Endsilbe auch in der Schreibung unterdrückt, so daß man erhält b, es, as des, ges, ces; bb, eses, asas, deses usw. In der Notenschrift werden die erhöhten durch ein vor die Note gesetztes ♯ (Kreuz, franz. dièse, engl. sharp), bzw. Doppelkreuz ×, die vertieften durch ein vorgesetztes ♭ (B, franz. bémol, engl. flat) bzw. Doppel-B ♭♭ bezeichnet.

Um die Zahl der neuen Töne nicht ins Unübersehbare wachsen zu lassen, faßt man nach gewissen Prinzipien nahe benachbarte, sogenannte enharmonische Töne zu einem einzigen zusammen, wenn die dadurch entstehende Ungenauigkeit vom Ohre nicht oder nur wenig wahrgenommen werden kann. Dadurch verringert sich die Zahl derselben erheblich. Bei weitergetriebener Vereinfachung, die allerdings schon recht merkbare Ungenauigkeiten und Härten bedingt, kommt man auf 12 Töne in der Oktave. Die aus dieser Anzahl von Stufen bestehende Tonleiter heißt chromatische Leiter; ihre Intervalle sind die chromatischen Halbtöne. Sie ist ein Kompromiß zwischen der Forderung reiner Stimmung und bequemer Handhabung der Instrumente mit fest gegebenen Tönen, z. B. Klavier, Harmonium, Orgel, und gestattet nur eine sehr beschränkte Modulation mit (annähernd) reinen Intervallen. Der Aufbau des umfangreicheren Tonsystems kann außer nach dem oben skizzierten Prinzip auch auf anderer Grundlage erfolgen, ebenso kann auch die Beschränkung auf eine geringere Zahl von Tönen in der Oktave in verschiedener Weise erfolgen. Hier kann darauf nicht näher eingegangen werden.

Die Einschiebung neuer Töne zwischen die Töne der siebenstufigen (diatonischen) Skalen ist schon deshalb nötig, weil deren

Intervalle zum Teil recht ungleich sind. Sehr einfach und ganz systematisch läßt sich das bei der Pythagoreischen Skala machen, indem man immer in Quintenschritten nach oben und nach unten weitergeht und die neuen Töne aus den höheren bzw. tieferen Oktaven durch Division bzw. Multiplikation ihrer Schwingungszahlen mit passenden Potenzen von 2 in die Ausgangsoktave versetzt. Dabei wird die 12. Quinte nach oben annähernd gleich der 7. Oktave des Grundtons, so daß sich von der 13. Quinte an näherungsweise dieselben Töne ergeben, der Kreislauf also von vorne beginnt (Quintenzirkel oder Quintenzykel). Es ist das Intervall der 12. Quinte gegen den Grundton $(\frac{3}{2})^{12}$, das Intervall der 7. Oktave gegen den Grundton 2^7, also das Intervall der 12. Quinte gegen die ihr benachbarte 7. Oktave

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{12} : 2^7 = \frac{3^{12}}{2^{19}} = \frac{531441}{524288}$$

oder näherungsweise

$$12.\ \text{Quinte} : 7.\ \text{Oktave} = 1 + \frac{1}{73{,}3} = \frac{74{,}3}{73{,}3}.$$

Vereinfacht wird dies 74 : 73, was man auch unmittelbar durch Kettenbruchentwicklung aus dem genauen Wert erhält. Dieses Intervall $\frac{74}{73}$ heißt Pythagoreisches Komma.

21. Gleichschwebende und reine musikalische Temperatur. Die bei den Instrumenten mit festen Tönen seit Sebastian Bach allgemein eingeführte chromatische Tonleiter beruht auf der sogenannten gleichschwebenden Temperatur (das Wort Temperatur hat in der Musik eine andere als die sonst gebräuchliche Bedeutung des Wärmemaßes). Bei dieser wird das Intervall der Oktave in 12 gleiche chromatische Halbtonintervalle geteilt, so daß jeder Ton ganz gleichmäßig als Grundton einer stets gleichgebauten Tonleiter dienen kann. Aber keiner von den Tönen dieser Skala außer der Oktave bildet mit dem Grundton ein einfaches, durch kleine Verhältniszahlen ausdrückbares Intervall, wie bei der natürlichen oder der Pythagoreischen Skala. Die Intervalle sind sogar irrational. Das Intervall des chromatischen Halbtons der gleichschwebenden Temperatur ist

$$\sqrt[12]{2} = 1{,}05946,$$

denn das Produkt dieser 12 Teilintervalle muß das Intervall 2 : 1 der Oktave zum Grundton ergeben. Die durch einfache Erhöhung

Tabelle 8.

Name des Tones	Reines Intervall	Gleichschwebend temperiertes Intervall	Fehler des temperierten Tones n temp. : n rein	Name des reinen Intervalls	Schwingungszahlen in der eingestrichnen Oktave für physikal. Stimmung $c_1 = 256$: enharmonisch rein	physikal. Stimmung $c_1 = 256$: gleichschwebend temperiert	internat. Stimmung ($a_1 = 435$): enharmonisch rein	internat. Stimmung ($a_1 = 435$): gleichschwebend temperiert	Name des Tones
c	1	1	1	Prim	**256**	**256**	**261**	**258,65**	*c*
cis	$\frac{25}{24} = 1{,}04166$	1,05946	1,01708	übermäßige Prim	$266\frac{2}{3}$	271,22	$271\frac{7}{8}$	274,03	*cis*
des	$\frac{9}{8}\cdot\frac{24}{25} = 1{,}08000$		0,98098	kleine Sekunde	$276\frac{12}{25}$		$281\frac{22}{25}$		*des*
d	$\frac{9}{8} = 1{,}12500$	1,12246	0,99774	große Sekunde	**288**	**287,35**	**$293\frac{5}{8}$**	**290,33**	*d*
dis	$\frac{9}{8}\cdot\frac{25}{24} = 1{,}17187$	1,18921	1,01479	übermäßige Sekunde	300	304,44	$305\frac{55}{64}$	307,59	*dis*
es	$\frac{5}{4}\cdot\frac{24}{25} = 1{,}20000$		0,99101	kleine Terz	**$307\frac{1}{5}$**		**$313\frac{1}{5}$**		*es*
e	$\frac{5}{4} = 1{,}25000$	1,25992	1,01026	große Terz	**320**	**322,54**	**$326\frac{1}{4}$**	**325,88**	*e*
fes	$\frac{4}{3}\cdot\frac{24}{25} = 1{,}28000$		0,98433	verminderte Quarte	$327\frac{17}{25}$		$334\frac{2}{25}$		*fes*
eis	$\frac{5}{4}\cdot\frac{25}{24} = 1{,}30208$	1,33484	1,02516	übermäßige Terz	$333\frac{1}{3}$	**341,72**	$339\frac{27}{32}$	**345,26**	*eis*
f	$\frac{4}{3} = 1{,}33333$		1,00113	reine Quarte	**$341\frac{1}{3}$**		**348**		*f*

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
fis	$\frac{4}{3}\cdot\frac{25}{24}=1{,}38889$	1,41421	1,01823	übermäßige Quarte	$355\frac{5}{9}$	362,04	$362\frac{1}{2}$	365,79	*fis*
ges	$\frac{3}{2}\cdot\frac{24}{25}=1{,}44000$		0,98209	verminderte Quinte	$368\frac{16}{25}$		$375\frac{21}{25}$		*ges*
g	$\frac{3}{2}=1{,}50000$	1,49831	0,99888	reine Quinte	**384**	**383,57**	**$391\frac{1}{2}$**	**387,54**	*g*
gis	$\frac{3}{2}\cdot\frac{25}{24}=1{,}56250$	1,58740	1,01593	übermäßige Quinte	400	406,37	$407\frac{13}{16}$	410,59	*gis*
as	$\frac{5}{3}\cdot\frac{24}{25}=1{,}60000$		0,99212	kleine Sexte	**$409\frac{3}{5}$**		**$417\frac{3}{5}$**		*as*
a	$\frac{5}{3}=1{,}66667$	1,68179	1,00907	große Sexte	**$426\frac{2}{3}$**	**430,54**	**435**	**435**	*a*
ais	$\frac{5}{3}\cdot\frac{25}{24}=1{,}73611$	1,78180	1,02631	übermäßige Sexte	$444\frac{4}{9}$	456,14	$453\frac{1}{8}$	460,87	*ais*
b	$15\cdot\frac{24}{25}=1{,}80000$		0,98989	kleine Septime	**$460\frac{4}{5}$**		**$469\frac{4}{5}$**		*b*
h	$\frac{15}{8}=1{,}87500$	1,88775	1,00680	große Septime	**480**	**483,26**	**$489\frac{3}{8}$**	**488,27**	*h*
ces	$2\cdot\frac{24}{25}=1{,}92000$		0,98320	verminderte Oktave	$491\frac{13}{25}$		$501\frac{3}{25}$		*ces*
his	$\frac{15}{8}\cdot\frac{25}{24}=1{,}95313$	2,00000	1,02407	übermäßige Septime	500	**512**	$509\frac{49}{64}$	**517,31**	*his*
c	2		1	Oktave	**512**		522		*c*

(♯) eines Tones und durch ebensolche Vertiefung (♭) des nächst höheren Ganztones erhaltenen Töne, die bei den natürlichen Skalen verschieden sind (z. B. cis und des, gis und as usw.), werden hier natürlich gleich. Tabelle 8 (zum Teil entnommen aus H. Starke, Physikalische Musiklehre) gibt einen Überblick über die Intervalle in reiner (natürlicher) und gleichschwebender Temperatur. Die vier letzten Zahlenspalten geben für die eingestrichene Oktave die Frequenzen der Töne bei enharmonisch reiner und bei gleichschwebender Temperatur in physikalischer Stimmung ($c_1 = 256$ Schwingungen pro Sekunde) und in internationaler Stimmung ($a_1 = 435$ Schwingungen pro Sekunde). Ausführlichere Tabellen der Schwingungszahlen sind die von Stumpf und Schaefer herausgegebenen Tontabellen.[1])

4. Kapitel.

System mit einem Freiheitsgrad. Ungedämpfte Eigenschwingungen eines Massenpunktes.

22. Materielle Punktsysteme. Einteilung der wirkenden Kräfte. Alle schwingenden Körper sind räumlich ausgedehnt und erleiden bei den Schwingungen im allgemeinen Formänderungen, sie sind elastisch. In manchen Fällen aber kommen diese beiden Momente (räumliche Ausdehnung und Elastizität) für das Endergebnis der Rechnung wenig in Betracht; man erhält vielmehr qualitativ dasselbe, wenn man mit den idealen Grenzfällen des starren Körpers bzw. des Körpers ohne räumliche Ausdehnung, d. h. des materiellen oder Massenpunktes rechnet. Daher haben die Schwingungen materieller Punkte und Punktsysteme auch für die Akustik ihre Bedeutung.

Wenn die Kräfte gegeben sind, welche auf die einzelnen Punkte eines Punktsystems wirken, so kann man auf Grund der Gesetze der Mechanik die Differentialgleichungen der Bewegung für die Punkte allgemein aufstellen. Die Gleichungen, welche die Lage und Geschwindigkeit jedes Punktes als Funktion der Zeit in expliziter Form darstellen, kann die mathematische Analysis

1) C. Stumpf und Schaefer, Tontabellen, Leipzig 1901. Auch in den „Beiträgen zur Akustik und Musikwissenschaft", hrsg. von C. Stumpf, Heft 3 (1901).

aber nur für gewisse einfache Kraftgesetze durch Integration daraus ableiten.

Die Kräfte können von der Lage und der Geschwindigkeit der Punkte abhängen. Aber selbst wenn sie nur von der Lage abhängen, also „Lagekräfte“ sind, ist die Integration der Differentialgleichungen nicht allgemein möglich, wie ja das Problem der Bewegung der Himmelskörper, das sogenannte Dreikörperproblem (bzw. Vielkörperproblem) zeigt, bei dem es sich auch um Schwingungen im weiteren Sinne handelt. Dort hängen die Kräfte von der relativen Lage der Punkte zueinander ab, wodurch die Lösung erschwert wird. Verhältnismäßig einfach wird das Problem, wenn die Kräfte nicht von der relativen Lage der Punkte gegeneinander, sondern von der absoluten Lage im Raume oder, was dasselbe besagt, von der relativen Lage gegen gewisse feste Punkte, ihre Ruhe- oder Gleichgewichtslagen, abhängen. Dieser Fall hat für die Akustik bei weitem das größte Interesse. Kräfte dieser Art sind die rücktreibenden Direktionskräfte, welche die Eigenschwingungen des Systems überhaupt erst ermöglichen und ihren Verlauf bestimmen. Sie sind stets konservative Kräfte.

Außer diesen Kräften können noch solche wirken, die von der Geschwindigkeit der Punkte abhängen („Geschwindigkeits-“ oder „Bewegungskräfte“). Hier kann sowohl Größe als auch Richtung der Geschwindigkeit eine Rolle spielen; der wichtigste Fall ist jedoch der, wo die Richtung gleichgültig ist und nur die jeweilige Größe der Geschwindigkeit von Einfluß ist. Diese von der Geschwindigkeit abhängenden Kräfte sind stets hemmende, die Bewegung dämpfende und Bewegungsenergie zerstreuende, also dissipative Kräfte (z. B. Reibungskräfte).

Zu den angeführten Arten können ferner treibende Kräfte kommen, die nicht von Lage und Geschwindigkeit, wohl aber von der Zeit abhängen. Man behandelt und bezeichnet sie als äußere oder eingeprägte Kräfte; sie bestimmen die erzwungene Bewegung des Systems. Der allgemeinere Fall, daß auch die beiden anderen Kraftarten (Lage- und Geschwindigkeitskräfte) noch explizite von der Zeit abhängen, so daß also z. B. die rücktreibende Kraft, welche auf den Punkt in einer gegebenen Entfernung von der Ruhelage wirkt, zu verschiedenen Zeiten verschieden groß ist, hat immerhin auch eine gewisse, aber doch nur untergeordnete Bedeutung. Er läßt sich z. B. dadurch verwirklichen, daß man

den schwingenden Körper bzw. das Punktsystem langsam erwärmt oder abkühlt, wobei die rückwirkenden Kohäsionskräfte sowie die Reibungskräfte sich zeitlich ändern.

Jedem Körper kommt eine gewisse Anzahl von Bewegungsmöglichkeiten, Freiheitsgrade der Bewegung, zu, die von seiner Natur abhängt. Bei einem aus getrennten materiellen Punkten bestehenden System hängt dieselbe von der Anzahl der Punkte und ihrer gegenseitigen Verkettung ab. Die Zahl der Freiheitsgrade ist so groß wie die Zahl der unabhängigen Koordinaten, welche nötig sind, um die Konfiguration des Systems, z. B. bei einem Punktsystem die Lage aller Punkte vollständig zu bestimmen.

Ein einzelner frei beweglicher Punkt hat drei Freiheitsgrade, da drei unabhängige Koordinaten erst seine Lage im Raume völlig bestimmen; ein Punkt, der auf einer gegebenen Fläche zu bleiben gezwungen wird, hat zwei Freiheitsgrade; ein Punkt, der sich nur längs einer gegebenen Linie (Kurve) bewegen kann, hat einen Freiheitsgrad, stellt also das rechnerisch einfachste System dar. Wir betrachten hier zunächst seine typischen, unter Einwirkung verschiedener Kräfte zustande kommenden Schwingungsformen, die erst das Verständnis der Schwingungsformen komplizierter Punktsysteme und der elastischen Körper ermöglichen. Übrigens gelten die Bewegungsgesetze des Punktes mit einem Freiheitsgrad ohne weiteres auch für einen starren Körper, wenn er sich ohne Drehung bewegt, und ebenso für einen starren Körper, der sich nur um eine feste Achse drehen kann; nur ist in letzterem Falle statt der Masse das Trägheitsmoment in bezug auf die Drehachse, statt Geschwindigkeit und Beschleunigung die Winkelgeschwindigkeit und Winkelbeschleunigung zu setzen.

23. Ungedämpfte Eigenschwingung bei beliebiger Form der rücktreibenden Kraft. Der einfachste Fall ist der, wo weder äußere (eingeprägte) Kräfte noch dissipative Geschwindigkeitskräfte vorhanden sind, und nur eine von der Entfernung des Punktes aus seiner Ruhelage abhängige rücktreibende „Lagekraft" wirkt. Wegfall der äußeren Kräfte führt auf die natürlichen oder Eigenschwingungen des Systems, Wegfall der dissipativen (Reibungs-) Kräfte macht dieselben ungedämpft. Nach dem zweiten Newtonschen Bewegungsgesetz gilt: Das Produkt aus Masse und momentaner Beschleunigung (bzw. aus Trägheitsmoment und momentaner Winkelbeschleunigung) ist gleich der wirkenden Kraft; oder Beschleunigungskraft und treibende Kraft halten sich

in jedem Augenblick das Gleichgewicht. Die Bewegungsrichtung des Punktes sei die x-Achse in Cartesischen Koordinaten, seine Ruhelage der Koordinatenursprung $x = 0$. Die treibende „Lagekraft" als Funktion seiner Entfernung von der Ruhelage sei durch $f(x)$ ausgedrückt; t sei die Zeit, u die Geschwindigkeit, M die Masse des Punktes. Es ist

$$\text{(1)} \qquad \text{Geschwindigkeit } u = \frac{dx}{dt},$$

$$\text{(2)} \qquad \text{Beschleunigung } \frac{du}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}.$$

Die Bewegungsgleichung wird also allgemein:

$$\text{(3)} \qquad M\frac{d^2x}{dt^2} = f(x).$$

Die Kraft $f(x)$ kann eine beliebige Funktion von x sein; nur muß sie zur Erzeugung von Schwingungen immer nach dem Schwingungszentrum $x = 0$ hin gerichtet sein. Rechnet man eine in der positiven x-Richtung wirkende Kraft als positiv, in entgegengesetzter $-x$-Richtung wirkend negativ, so muß also $f(x)$ für positive x negativ, für negative x positiv sein. Ist ihr absoluter Betrag (also ohne Rücksicht auf das Vorzeichen) für gleiche positive und negative Werte von x gleich groß, so ist die Kraft und die resultierende Schwingung symmetrisch zur Ruhelage, andernfalls unsymmetrisch.

Die Integration der Bewegungsgleichung (3), einer gewöhnlichen linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung, ist allgemein möglich; durch einfache Funktionen, rechnerisch bequem, darstellbar ist sie aber nur für gewisse einfache Formen des Kraftgesetzes $f(x)$.

Die allgemeine Lösung wird erhalten, indem man zunächst die Geschwindigkeit u statt x als von t abhängige Variable einführt. Aus (2) und (3) folgt:

$$\text{(4)} \qquad M\frac{du}{dt} = f(x).$$

Also, indem man aus (1) $dt = \frac{dx}{u}$ in (4) einsetzt:

$$\text{(5)} \qquad M u\, du = f(x)\, dx.$$

Dies gibt integriert:

$$\text{(6)} \qquad \frac{M}{2}u^2 = \int f(x)\, dx + \text{konst.};$$

also wird die Geschwindigkeit

$$u = \sqrt{\frac{2}{M}\left[\int f(x)\,dx + \text{konst.}\right]}. \tag{7}$$

Hieraus folgt mit Hilfe von (1) die Differentialgleichung zwischen x und t:

$$\frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{M}\left[\int f(x)\,dx + \text{konst.}\right]}} = dt, \tag{8}$$

und durch Integration t als Funktion von x:

$$t = \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{M}\left[\int f(x)\,dx + \text{konst.}\right]}} + \text{konst.}', \tag{9}$$

woraus man nach Ausführung der Integration durch Umkehrung x als Funktion von t erhält. Rechnerisch läßt sich dies meist nur näherungsweise, streng nur in dem einfachsten und zugleich wichtigsten Falle durchführen, wenn $f(x)$ proportional der ersten Potenz des Abstandes x ist (vgl. Nr. **24**—**26**).

Die in der Natur vorkommenden rücktreibenden Direktionskräfte sind häufig derart, daß man sie durch eine Potenzreihe, z. B. die Mac Laurinsche Reihe darstellen kann. Man kann also setzen

$$f(x) = -Dx - D'x^2 - D''x^3 - \cdots. \tag{10}$$

Die negativen Vorzeichen sind gewählt, um diese Teilkräfte als rücktreibende zu kennzeichnen. Sie sind es in Wirklichkeit jedesmal nur dann, wenn das betreffende Produkt „Potenz von x mal Konstante" positiv ist für positive x, negativ für negative x, weil sich dann die betreffende Kraft immer nach der Ruhelage $x = 0$ hin gerichtet ergibt. Dies ist für die ungeraden Potenzen symmetrisch, d. h. für positive und negative x erfüllt, wenn die Konstanten D, D'' usw. positiv genommen werden. Solche von ungeraden Potenzen der Entfernung abhängige Kräfte geben also symmetrische Schwingungen. Hinzutreten von Kräften, die geraden Potenzen von x proportional sind, bewirkt Unsymmetrie der Schwingungen. Denn diese Kräfte wirken dauernd in derselben absoluten Richtung (entweder nach $+x$ oder nach $-x$), wenn nicht beim Durchgang durch die Ruhelage $x = 0$ die Kon-

stanten D', D''' usw. ihre Vorzeichen ändern; sie wirken also nur auf der einen Seite rücktreibend, auf der anderen dagegen forttreibend. Aus diesem Grunde können sie auch nicht allein eine Schwingung erzeugen, sondern nur eine vorhandene ändern; sie dürfen daher auch niemals die Kräfte mit ungeraden Potenzen überwiegen, weil sonst keine Schwingung mehr möglich ist.

Die Konstanten D, D', D'' usw. in (10) sind die rücktreibenden Kräfte, wenn sich der Punkt in der Entfernung $x = 1$ von der Ruhelage befindet. Sie werden als Direktionskräfte bezeichnet. Bei drehenden Schwingungen, wo x einen Winkel darstellt, sind es rücktreibende Drehmomente.

Da eigentlich kein Grund vorhanden ist, warum nicht auch symmetrisch wirkende Kräfte, die geraden Potenzen von x proportional sind, und unsymmetrisch wirkende, die ungeraden Potenzen proportional sind, vorkommen sollten, so ist die obige Reihenentwicklung (10) für $f(x)$ mit konstanten, an der Stelle $x = 0$ ihr Vorzeichen behaltenden Koeffizienten unvollkommen. Doch genügt sie für die meisten Näherungsrechnungen. Eine andere Entwicklung von $f(x)$, welche auch gerade Potenzen als symmetrisch wirkende Kräfte einführt, bildet die Entwicklung nach Fourierschen Reihen (vgl. 2. Kapitel). Ein spezieller Fall der Potenzreihe für $f(x)$ ergibt sich, wenn $f(x) = A \sin x$, d. h. die Kraft proportional dem Sinus der Ablenkung ist, was bei der strengen Behandlung der Schwingungen des physikalischen (und mathematischen) Pendels zutrifft und auf elliptische Integrale führt. Übrigens kann man ohne weiteres auch mittels der geraden Potenzen von Reihe (10) symmetrische Schwingungen behandeln, indem man die Rechnung auf das positive Gebiet beschränkt und die Bewegung auf der negativen Seite einfach als Spiegelbild der positiven konstruiert. Man muß nur dafür sorgen, daß außer der Variablen x selber auch ihre durch die Lösung bestimmten Differentialquotienten $\frac{dx}{dt}$ und $\frac{d^2x}{dt^2}$ an der Stelle $x = 0$ stetig bleiben.

24. Ungedämpfte sinusförmige Eigenschwingungen. Der theoretisch wichtigste, in der Natur freilich nur immer annähernd realisierte Fall ist vorhanden, wenn die Kraft $f(x)$ mit der ersten Potenz der Ablenkung x proportional ist. Die Reihe (10) beschränkt sich dann auf das erste Glied $-Dx$, und man erhält ungedämpfte sinusförmige (auch pendelförmige oder har-

monische genannte) Schwingungen. Die Gleichungen Nr. **23** (3) bis (9) werden hier sehr einfach, nämlich:

$$M \frac{d^2x}{dt^2} = -Dx \tag{11}$$

oder

$$\frac{dx^2}{dt^2} + n^2 x = 0, \tag{11a}$$

wenn man setzt:

$$\frac{D}{M} = n^2. \tag{12}$$

Die rücktreibende Kraft ist hier also $f(x) = -Dx = -Mn^2x$.

Durch Anwendung der gleichen Methode wie oben erhält man:

$$\frac{du}{dt} + n^2 x = 0, \quad u\,du + n^2 x\,dx = 0.$$

Also durch Integration:

$$u^2 + n^2 x^2 = \text{konst.}$$

oder

$$u^2 = n^2 (a^2 - x^2), \tag{13}$$

wenn die additive Integrationskonstante $= n^2 a^2$ gesetzt wird. Die neue Konstante a heißt Schwingungsamplitude. Daraus folgt weiter:

$$u = \frac{dx}{dt} = n\sqrt{a^2 - x^2} = na\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}, \tag{14}$$

also:

$$\frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} = n\,dt; \tag{14a}$$

dies ergibt durch Integration:

$$\text{arc}\left(\sin \frac{x}{a}\right) = nt + \vartheta \tag{15}$$

oder umgekehrt:

$$x = a \sin(nt + \vartheta), \tag{16}$$

wo ϑ und a die beiden willkürlichen Integrationskonstanten sind.

Durch Differentiation nach t folgt hieraus die Geschwindigkeit

$$u = an\cos(nt + \vartheta). \tag{17}$$

Statt dieser selbständigen Entwicklung könnte man natürlich die Gleichungen (7) bis (9) von Nr. 23 direkt benutzen und in ihnen

$$f(x) = -Dx = -Mn^2x \tag{18}$$

setzen, wodurch man sofort aus Gl. (7) und (9) bei passender Bezeichnung der Integrationskonstanten (13) und (15) erhält.

Die beiden Integrationskonstanten a und ϑ, Amplitude und Phasenkonstante, lassen sich berechnen, wenn man den Schwingungszustand (Lage x und Geschwindigkeit u des Punktes) zu irgendeiner Zeit $t = t_0$ kennt. Gewöhnlich wird als diese Zeit t_0 der Anfangspunkt der Zeit $t = 0$ gewählt; man spricht dann von den Anfangsbedingungen des Problems. Allgemeiner werden die Bedingungen, welche die Werte der Integrationskonstanten bestimmen, Grenzbedingungen genannt, und man hat da zu unterscheiden zwischen zeitlichen und räumlichen Grenzbedingungen. Letztere werden auch als Randbedingungen bezeichnet. Hier kommen nur zeitliche in Betracht.

Wird z. B. verlangt, daß zur Zeit $t = 0$ der Punkt durch die Ruhelage $x = 0$ hindurchgeht, so muß $\vartheta = 0$ oder gleich einem ganzzahligen Vielfachen von π sein. Soll außerdem bei dem Durchgang die Bewegung nach der $+x$-Richtung gerichtet, d. h. die Geschwindigkeit u positiv sein, so muß wegen (17) $\vartheta = 0$ oder gleich einem geradzahligen Vielfachen von π sein. Die Amplitude a ist die Maximalentfernung von der Ruhelage, welche der Punkt bei seinen Schwingungen erreicht.

Beispiel: 1. Der Punkt wird aus der Ruhelage um eine Strecke x_0 entfernt und ohne Geschwindigkeit losgelassen. Die Anfangsbedingungen sind also: für $t = 0$ muß $x = x_0$ und $u = 0$ sein. Die Gleichungen (16) und (17) ergeben dafür sofort:

$$0 = \cos\vartheta, \quad \text{also } \vartheta = (4k+1)\frac{\pi}{2} \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

$$x_0 = a\sin\vartheta, \quad \text{also } a = x_0,$$

d. h. ϑ muß ein ungerades Vielfaches von $\frac{\pi}{2}$, im einfachsten Falle also $\frac{\pi}{2}$, und a muß gleich x_0 sein.

2. Der Punkt erhält in der Ruhelage $x = 0$ zur Zeit $t = 0$ auf irgendeine Weise die Geschwindigkeit u_0 mitgeteilt. Also muß für $t = 0$ sein: $x = 0$ und $u = u_0$. Das gibt:

$$0 = \sin\vartheta, \qquad \text{also } \vartheta = 2k\pi \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

$$u_0 = an\cos\vartheta, \quad \text{also } a = \frac{u_0}{n}.$$

Die Kreisfrequenz n und damit die Periode T und Schwingungsfrequenz N in 1 Sekunde sind nach (12) durch Direktionskraft D und Masse M bestimmt, nämlich

$$(19) \qquad n = \sqrt{\frac{D}{M}} \quad \text{und} \quad T = \frac{1}{N} = \frac{2\pi}{n} = 2\pi\sqrt{\frac{M}{D}}.$$

Bei drehenden Schwingungen tritt statt der Masse M das Trägheitsmoment K, statt der Kraft D das Drehmoment ein. Vergrößerung der Masse (bzw. des Trägheitsmoments) vergrößert T, verlangsamt also die Schwingung; Vergrößerung der Direktionskraft D beschleunigt sie.

Die Periode T kann man auch direkt aus (14a) durch Integration erhalten, ohne daß man, wie es in (15) geschehen ist, x explizite als Funktion der Zeit t darzustellen braucht, was bei komplizierteren Funktionen oft nicht möglich ist. Man sieht nämlich, daß der Differentialausdruck links, absolut — d. h. ohne Rücksicht auf das Vorzeichen — genommen, für gleich große x immer gleichen Wert hat. Daher hat auch das Integral, genommen zwischen den Werten $x = 0$ und $x = +a$, oder $+a$ und 0, oder 0 und $-a$, oder $-a$ und 0, immer den gleichen Wert, dem auf der rechten Seite eine Viertelperiode $\frac{T}{4}$, multipliziert mit der „Kreisfrequenz“ n, entspricht. Für den Fall der Gl. (14a), d. h. für Sinusschwingungen, wird die linke Seite gleich $\frac{\pi}{2}$, wenn die rechte $\frac{nT}{4}$ ist, woraus Gl. (19) folgt.

25. Die Energie bei Sinusschwingungen. Die Intensität der Schwingung wird durch den Gesamtbetrag der ins Spiel kommenden Energie gegeben. Diese ist in den Umkehrpunkten, wo die Geschwindigkeit Null ist, vollständig potentiell, beim Durchgang durch die Ruhelage vollkommen kinetisch, in anderen Lagen setzt sie sich aus beiden Teilen zusammen. Bei symmetrischen, z. B. den Sinusschwingungen, ist die kinetische, daher auch die

potentielle Energie in gleicher Entfernung x zu beiden Seiten der Ruhelage gleich groß. Die Gesamtenergie bei der Sinusschwingung ist

$$E = \frac{M}{2} u_0^2 = \frac{M}{2} n^2 a^2, \tag{20}$$

also proportional dem Quadrat der Amplitude a. Von zwei Schwingungen gleicher Amplitude, aber verschiedener Frequenz n_1 und n_2 hat diejenige mit größerer Frequenz (kleinerer Periode) die größere Energie.

Die kinetische Energie in einem Zeitpunkt t ist:

$$U = \frac{M}{2} u^2 = \frac{a^2 n^2 M}{2} \cos^2 (nt + \vartheta), \tag{21}$$

die potentielle also, gemäß dem Prinzip der Erhaltung der Energie:

$$V = E - U = \frac{a^2 n^2 M}{2} [1 - \cos^2 (nt + \vartheta)]$$

oder

$$V = \frac{a^2 n^2 M}{2} \sin^2 (nt + \vartheta). \tag{22}$$

Mit Benutzung von Gl. (16) (Nr. **24**) kann man U und V auch als Funktionen der Ablenkung x ausdrücken, nämlich

$$U = \frac{M n^2 (a^2 - x^2)}{2}, \quad V = \frac{M n^2 x^2}{2}. \tag{23}$$

Diese Gleichungen sind übrigens auch direkt aus den Gl. (13) (Nr. **24**) bzw. (6) (Nr. **23**) und der Definition der kinetischen Energie $U = \frac{M u^2}{2}$ abzuleiten.

Bei der sinusförmigen Schwingung eines Punktes ist also die potentielle Energie in jedem Augenblick proportional dem Quadrat der Ablenkung x, ebenso wie die kinetische Energie proportional dem Quadrate der jeweiligen Geschwindigkeit u ist. Das hängt damit zusammen, daß die rücktreibende Kraft $f(x) = -Dx$ der ersten Potenz von x proportional ist. Die potentielle Energie V ist nämlich hier das „Potential“, dessen negative Ableitung nach der Richtung x, also $-\frac{\partial V}{\partial x}$, die in dieser Richtung wirkende Lagekraft ergibt, wovon man sich mittels Gl. (23) und (12) Nr. **24** leicht überzeugt.

Umgekehrt führt die Annahme, daß die potentielle Energie V eine quadratische Funktion der Ablenkung x sei auf eine rück-

treibende Kraft, die proportional der Ablenkung x ist, also auf Sinusschwingungen. Das gilt auch für Schwingungssysteme, die aus mehreren Punkten bestehen; wenn die potentielle Energie V eine quadratische Funktion der Ablenkungen der einzelnen Punkte aus ihren Ruhelagen ist, so sind die rücktreibenden Kräfte lineare Funktionen der Ablenkungen und man erhält Sinusschwingungen (vgl. Nr. **50**). Diese Annahme quadratischer Abhängigkeit des V von den Ablenkungen, also eines linearen Kraftgesetzes, ist für die in der Natur herrschenden Verhältnisse eine erste Näherung und gilt immer, wenn man in dem allgemeinen Ausdruck für die Kraft $f(x)$ [Gl. (10) Nr. **23**] die höheren Potenzen gegen die erste vernachlässigen kann. Sie wird um so eher erfüllt sein, je kleiner die Ablenkungen x bleiben, und bildet somit die Grundlage der Theorie der kleinen (eigentlich der verschwindend kleinen) Schwingungen. Wo die Grenze liegt, an der diese Vernachlässigung nicht mehr gestattet ist, muß von Fall zu Fall entschieden werden, ist aber häufig schwer zu sagen. Neuere akustische Untersuchungen über die sogenannten Kombinationstöne usw. haben gezeigt, daß man in vielen Fällen die höheren Glieder mit berücksichtigen muß, auch wenn die Amplituden anscheinend so klein sind, daß man geneigt sein könnte, sie zu vernachlässigen. (Vgl. darüber Nr. **41** ff. und Bd. II.)

26. Nicht-sinusförmige symmetrische Schwingungen. Man erhält spezielle Formen derselben, wenn man die rücktreibende Kraft irgendeinem Gliede mit ungerader Potenz von x in Nr. **23** (10) oder der Summe mehrerer von ihnen gleich setzt. Nach der Bemerkung am Schlusse von Nr. **23** S. 45 erhält man noch andere spezielle Formen auch durch Benutzung von Gliedern mit geraden Potenzen, wenn man die Rechnung auf positive Werte von x beschränkt und für negative einfach das Spiegelbild der Bewegung der positiven Seite konstruiert. Die erste Integration der Differentialgleichung (3) bzw. ihrer veränderten Formen (4) und (5) in Nr. **23** läßt sich dann immer ausführen und gibt die Gleichung (6) daselbst, die weiter nichts als das Prinzip der Energieerhaltung ist und aus der man sofort Gl. (7), d. h. die Geschwindigkeit u erhält. Die folgende Integration von (8) zu (9) führt aber auf elliptische oder höhere algebraische Integrale. Z. B. wird für $f(x) = -D''x^3$:

$$(24)\qquad u = \sqrt{\frac{2}{M}\cdot \text{konst} - \frac{2}{M}\frac{D''x^4}{4}} = \sqrt{\frac{2D''}{4M}}\sqrt{a^4 - x^4},$$

wenn die Konstante der Gl. (6) in Nr. **23** gleich $\frac{D'' a^4}{3}$ gesetzt wird, wobei a nun die Integrationskonstante ist. Oder entsprechend Gl. (13) in Nr. **24**:

$$u^2 = n''^2 (a^4 - x^4), \tag{25}$$

wenn auch hier eine der „Kreisfrequenz" n entsprechende Größe

$$n'' = \sqrt{\frac{D''}{2M}} \tag{26}$$

eingeführt wird.

Die Viertelperiode der Schwingung ergibt sich hier mittels der Gl. (8) der Nr. **23**, indem man für die Quadratwurzel ihren Wert u aus den obenstehenden Gleichungen (24) oder (25) einsetzt und (26) mit benutzt:

$$\frac{T}{4} = \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{\frac{D''}{2M}}\sqrt{a^4 - x^4}} = \frac{1}{n'' a} \int_{\frac{x}{a}=0}^{\frac{x}{a}=1} \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^4}}. \tag{27}$$

Das rechtsstehende Integral ist ein elliptisches Integral erster Gattung. Es läßt sich durch eine einfache Transformation in die gewöhnliche Form verwandeln. Man setzt

$$\frac{x}{a} = \cos\varphi, \qquad \text{also} \qquad d\left(\frac{x}{a}\right) = -\sin\varphi\, d\varphi$$

und erhält:

$$\int_{\frac{x}{a}=0}^{\frac{x}{a}=1} \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^4}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{\varphi=0} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}} = +\frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}},$$

wofür man in den Tabellen der elliptischen Integrale den Zahlenwert $1{,}85407 : \sqrt{2} = 1{,}3110$ findet.[1])

Daraus folgt also die Viertelperiode bzw. ganze Periode

$$\frac{T}{4} = \frac{1{,}3110}{a n''}, \qquad T = \frac{5{,}2440}{a n''}. \tag{28}$$

1) Vgl. z. B. Jahnke-Emde, Funktionentafeln. Diese Sammlung Bd. 5.

Die entsprechenden Werte für Sinusschwingungen sind:

$$\frac{T}{4} = \frac{\pi}{2n} = \frac{1,5708}{n}, \quad T = \frac{6,2832}{n}. \tag{29}$$

Es ist also die Periode hier von der Schwingungsamplitude a abhängig, während sie bei Sinusschwingungen — und zwar nur bei diesen — davon unabhängig ist. Sie nimmt mit wachsender Amplitude ab. Ähnliche Resultate erhält man, wenn die rücktreibende Kraft proportional der fünften Potenz der Ablenkung ist.

27. Nicht-sinusförmige Eigenschwingungen bei beliebigem, durch Potenzreihen darstellbarem Kraftgesetz. Wichtiger als diese Spezialfälle sind jedoch diejenigen, wo die Glieder mit höheren Potenzen als Zusatzkräfte zu einer der Ablenkung direkt proportionalen Kraft auftreten. Kommt nur noch das quadratische Glied in dem Ausdruck Nr. **23** (10) in Betracht, so erhält man den einfachsten Fall einer unsymmetrischen Schwingung. Die Bewegungsgleichung lautet:

$$M\frac{d^2x}{dt^2} = -Dx - D'x^2. \tag{30}$$

Dabei kann D' gleiches oder entgegengesetztes Vorzeichen wie D haben, d. h. das quadratische Glied kann entweder auf der positiven oder auf der negativen Seite das erste Glied unterstützen bzw. ihm entgegenwirken. Kommt statt des quadratischen allein das kubische Glied $D''x^3$ in Betracht, so erhält man die Gleichung

$$M\frac{d^2x}{dt^2} = -Dx - D''x^3, \tag{31}$$

welche in die der genaueren Berechnung der Schwingungen des mathematischen Pendels meist zugrunde gelegte Näherungsgleichung übergeht, wenn $-Dx - D''x^3$ die beiden ersten Glieder der Reihenentwicklung für $\sin x$ darstellen, wozu $D'' = -\frac{D}{6}$ sein muß.

Man kann diese und ähnliche Probleme in zweierlei Weise behandeln. Entweder kann man durch das allgemeine Integrationsverfahren der Nr. **23** diejenige Funktion in geschlossener Form aufsuchen, welche den Zusammenhang zwischen Ablenkung x und Zeit t darstellt, wobei man auch sofort den genauen Wert der Schwingungsdauer T erhält; oder — und das scheint aus gewissen Gründen (vgl. das am Schluß von Nr. **11**

Gesagte) für die Akustik wichtiger zu sein — man geht von der Sinusschwingung als Näherungslösung aus, indem man zunächst von den höheren Potenzen in dem Ausdruck der rücktreibenden Kraft absieht, und sucht diese Lösung durch Hinzufügen neuer Glieder, eventuell auch durch Änderung der Periode so umzuformen, daß sie die gegebene Gleichung mit genügender Annäherung befriedigt. Dies Verfahren beruht im Grunde darauf, daß man nach dem Fourierschen Satz jede Funktion in eine Sinus- bzw. Kosinusreihe entwickeln kann; nur kennt man hier die zu entwickelnde Funktion nicht direkt, sondern nur eine Differentialgleichung zweiter Ordnung, welcher sie genügen muß, und aus der sich ihre Eigenschaften ableiten lassen. Man erhält dabei also die Lösung in der Form einer Summe mehrerer Sinusschwingungen von verschiedener Periode. Diese Methode hat Lord Rayleigh[1]) angewandt.

28. Rücktreibende Kraft von der ersten und zweiten Potenz der Entfernung abhängig. Es gilt die Bewegungsgleichung in der Form von Nr. **27** (30), die man auch schreiben kann:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + n^2x + \alpha x^2 = 0, \tag{32}$$

wobei

$$\frac{D}{M} = n^2, \quad \frac{D'}{M} = \alpha \tag{33}$$

gesetzt ist.

Die allgemeine Integrationsmethode von Nr. **23** führt bei dieser Gleichung auf ein elliptisches Integral erster Gattung, welches die Zeit t als Funktion der jeweiligen Elongation x angibt. Als Umkehrung desselben erhält man x als eine elliptische Funktion von t. Diese läßt sich durch eine Fouriersche Reihe darstellen, deren erste Glieder man auch auf anderem Wege als Näherungslösung der Gleichung (32) ableiten kann, wenn das Glied αx^2 immer klein bleibt gegen n^2x. Eine erste Näherungslösung mit Vernachlässigung des quadratischen Gliedes αx^2 ist in diesem Falle $x = x_1 = A\cos(nt + \vartheta)$; eine zweite, welche auch das Glied αx^2 mit berücksichtigt, wird erhalten, indem man den Ansatz macht:

$$x = x_1 + x_2, \quad x_1 = A\cos(nt + \vartheta), \tag{34}$$

1) Lord Rayleigh, Theory of Sound I, § 67 ff.

wobei A und ϑ die beiden Integrationskonstanten sind. Man erhält durch Einsetzen dieses Wertes von x in (33) und Weglassung der Glieder, welche αx^2 als Produkt enthalten, eine neue Differentialgleichung für x_2:

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} + n^2 x_2 = -\alpha A^2 \cos^2(nt + \vartheta)$$

oder

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} + n^2 x_2 = -\frac{\alpha A^2}{2} - \frac{\alpha A^2}{2} \cos(2nt + 2\vartheta),$$

die das partikuläre Integral x_2 besitzt:

$$x_2 = -\frac{\alpha A^2}{2n^2} + \frac{\alpha A^2}{6n^2} \cos(2nt + 2\vartheta). \tag{35}$$

(Vgl. Nr. 37.)

Genauer wird diese zweite Näherung, wenn man statt der Frequenz n, welche die bei Wegfall des quadratischen Gliedes αx^2 resultierende Sinusschwingung haben würde, eine vorläufig unbestimmte Frequenz m annimmt, und diese nachträglich so bestimmt, daß die Glieder mit der Frequenz m in der Gleichung sich wegheben. Man erhält nämlich so als zweite Näherung:

$$x = A\cos(mt + \vartheta) - \frac{\alpha A^2}{2n^2} + \frac{\alpha A^2}{6n^2} \cos(2mt + 2\vartheta). \tag{36}$$

Dies gibt in (32) eingesetzt nach einigen Umformungen daselbst links den Wert

$$\left(-m^2 A + n^2 A - \frac{5\alpha^2 A^3}{6n^2}\right)\cos(mt + \vartheta)$$
$$-\left(\frac{2m^2 \alpha A^2}{3n^2} - \frac{2\alpha A^2}{3} + \frac{\alpha^3 A^4}{6n^4}\right)\cos(2mt + 2\vartheta)$$
$$+\frac{\alpha^2 A^3}{6n^2}\cos(3mt + 3\vartheta) - \frac{\alpha^3 A^4}{72n^4}\cos(4mt + 4\vartheta) + \frac{19\alpha^3 A^4}{72n^4}.$$

Hier fallen nun die Glieder der Frequenz m, deren Amplituden $m^2 A$ und $n^2 A$ viel größer sind als die übrigen Amplituden, ganz weg, wenn man die Frequenz m aus der Gleichung bestimmt:

$$m = \sqrt{n^2 - \frac{5\alpha^2 A^2}{6n^2}}, \tag{37}$$

oder nach dem binomischen Lehrsatz entwickelt:

$$m = n\left(1 - \frac{5\alpha^2 A^2}{12n^4} - \frac{25\alpha^4 A^4}{288n^8}\right). \tag{37a}$$

Da αA klein sein muß gegen n^2, so genügt meist das Glied mit A^2 allein, also

$$m = n\left(1 - \frac{5\alpha^2 A^2}{12 n^4}\right) \tag{37b}$$

Die Gleichung (32) wird damit annähernd erfüllt, indem die noch bleibenden Glieder der linken Seite nur kleine Werte haben, deren Gesamtbetrag bei diesem Grade der Annäherung vernachlässigt wird. Allerdings wird dabei ein Glied der Frequenz $3m$ vernachlässigt, dessen Amplitude $\frac{\alpha^2 A^3}{6 n^2}$ von derselben Größenordnung ist wie die des einen zur Bestimmung von m mitbenutzten Gliedes der Frequenz m.

Die Näherungslösung stellt sich also als eine Übereinanderlagerung zweier Sinus- bzw. (was dasselbe ist) zweier Kosinusschwingungen mit den Frequenzen m und $2m$ dar, d. h., musikalisch gesprochen, als Übereinanderlagerung der Prim und Oktave. Bei stärkerem Einfluß des quadratischen Gliedes im Kraftgesetz würden noch höhere Oberschwingungen auftreten und die Frequenz m würde noch stärker geändert werden.

Die Gl. (32) führt auf unsymmetrische Schwingungen, wenn man sie in dieser Form sowohl für positive wie für negative x benutzt; sie läßt aber auch eine Lösung für symmetrische Schwingungen bei gleichem Kraftgesetz zu, wenn man sie in dieser Form nur auf positive x von $x = 0$ bis zum Maximalwert beschränkt, für negative x aber $-\alpha$ statt α setzt. Die Integration läßt sich nach derselben Näherungsmethode ausführen, nur muß man beachten, daß nunmehr wegen der symmetrischen Kraft auch die Schwingungskurve zur t-Achse symmetrisch verlaufen muß. Das bedingt aber, daß in der Fourierreihe nur Glieder vorkommen, deren Frequenzen ungerade Vielfache der Grundfrequenz sind.

Die Form der unsymmetrischen Schwingung wird mit der in Gl. (36) gegebenen Annäherung durch die stark ausgezogene Linie $BCDEB_1C_1$ der Figur 5 dargestellt, wenn man die Ordinaten x von der Geraden $O'R'$ anstatt von OR als Abszissenachse zählt. C und C_1 sind die Durchgangspunkte durch die Ruhelage. Man sieht, daß der Punkt länger auf der negativen Seite verweilt, weil die Schwingungsdauer dort wegen der geringeren Direktionskraft größer ist. Die ganze Schwingungsdauer $T = \frac{2\pi}{m}$ zerfällt also in zwei ungleiche Teile T_+ und T_-.

Dieselben Resultate bezüglich der Schwingungsdauer erhält man nach F. A. Schulze[1]), wenn man die Gleichung (32) zunächst streng integriert und das sich dabei für T ergebende elliptische Integral durch Reihenentwicklung näherungsweise darstellt.

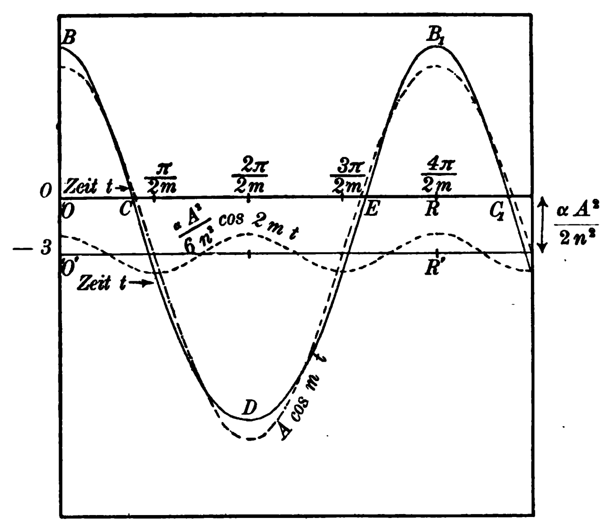


Fig. 5. Unsymmetrische Schwingung, dargestellt durch die Näherungslösung

$$x = A\cos mt + \frac{\alpha A^2}{6n^2}\cos 2mt - \frac{\alpha A^2}{2n^2}.$$

Abszissen: Zeit t.
Ordinaten: Ausgezogene Kurve ——— : Gesamtschwingung x.
Gestrichelte Kurven – – – – : Teilschwingungen $A\cos mt$ und $\frac{\alpha A^2}{6n^2}\cos 2mt$.

Beispiel. Die rücktreibenden Kräfte $-Dx$ und $-D'x^2$ sollen in der Entfernung $x = 1$ cm von der Ruhelage gleich groß sein, oder — was dasselbe ist — man wählt die Entfernung, in welcher beide Kräfte gleich werden, als Längeneinheit. Also wird $D' = D$ und

$$\alpha = \frac{D'}{M} = \frac{D}{M} = n^2.$$

Die Schwingungsfrequenz der entsprechenden reinen Sinusschwingung sei 256 in der Sekunde (Ton c_1), also $n = 2\pi \cdot 256 = 1608{,}5$.

1) F. A. Schulze, Annalen der Physik 9 (1902), 1111; vgl. auch F. Richarz und P. Schulze ebenda 8, 348.

Dann ist die (Kreis-)Frequenz der unsymmetrischen Schwingung nach (37a)

$$m = n\left(1 - \frac{5A^2}{12} - \frac{25A^4}{288} + \cdots\right).$$

Man erhält für verschiedene Amplituden A die in Tabelle 9 berechneten Werte.

Tabelle 9.
Elongationen und Frequenz der unsymmetrischen Schwingung.

Amplitude A	Elongation positive	Elongation negative	Frequenzverhältnis m/n nach (38a)	Frequenz N (nach 38a)	Frequenz N angenähert nach (38b)
0	0	0	1	256	256
0,1	0,0967	0,1033	1 − 0,0042	254,93	254,93
0,2	0,1867	0,2133	1 − 0,0168	251,70	251,73
0,3	0,2700	0,3300	1 − 0,0382	246,22	246,39
0,4	0,3467	0,4533	1 − 0,0689	238,35	238,95
0,5	0,4167	0,5833	1 − 0,1096	227,90	229,30
1	2	3	4	5	6

Die letzte Spalte enthält die nach der kürzeren Formel (37b) berechnete Frequenz. Dieselbe weicht erst bei recht großen Amplituden merklich von der nach der andern berechneten ab. Die Nullen in der ersten Zeile bedeuten sehr kleine, der Null nahe kommende Werte.

Wie weit man mit der Amplitude A gehen darf, ohne daß die Lösung (36) ungültig wird, hängt von dem geforderten Grade der Genauigkeit ab. Bei $A = 0,5$ beträgt die größte im Laufe der Rechnung vernachlässigte Amplitude, nämlich die eines Gliedes mit der Frequenz $3m$ bereits etwa 3 Prozent der Gesamtamplitude A.

29. Rücktreibende Kraft von der ersten und dritten Potenz der Entfernung abhängig. Die Bewegungsgleichung wird

$$\frac{d^2x}{dt^2} + n^2x + \beta x^3 = 0, \tag{38}$$

wo wieder $\frac{D}{M} = n^2$ und $\frac{D''}{M} = \beta$ gesetzt ist. Eine ganz ähnliche Rechnung führt hier nach Rayleigh[1]) zu der Näherungslösung

1) Lord Rayleigh, Theory of Sound, Bd. I, § 67.

$$(39) \qquad x = A\cos(mt + \vartheta) + \frac{\beta A^3}{4(9m^2 - n^2)}\cos(3mt + 3\vartheta),$$

wobei m zu berechnen ist aus

$$(40) \qquad m = \sqrt{n^2 + \frac{3\beta A^2}{4}}$$

oder, da $\frac{3\beta A^2}{4}$ klein gegen n^2 angenommen werden muß, durch Reihenentwicklung der Wurzel näherungsweise

$$(40\mathrm{a}) \qquad m = n\left(1 + \frac{3\beta A^2}{8n^2} - \frac{9\beta^2 A^4}{128 n^4} + \cdots\right).$$

Diese Lösung entspricht hier nun einer symmetrischen Schwingung, während die entsprechende unsymmetrische nach demselben Verfahren erhalten werden kann wie im vorigen Fall die symmetrische. Die Schwingung entsteht näherungsweise aus der Übereinanderlagerung von Prim und Duodezime. Die Frequenzänderung ist, wie aus dem Vergleich von (40) mit (39) folgt, bei dieser symmetrischen von der dritten Potenz der Ablenkung beeinflußten Schwingung etwas geringer als bei der vorher behandelten unsymmetrischen, bei der nur die zweite Potenz noch mitwirkt. Überhaupt wirkt Unsymmetrie allgemein störender als schnellerer Anstieg der rücktreibenden Kraft mit wachsender Elongation.

Das wesentliche Ergebnis dieser Behandlung der Schwingungsprobleme bleibt, daß man die Funktion, welche die Ablenkung aus der Ruhelage als zeitlich abhängige Variable darstellt, in eine Fouriersche Reihe entwickeln kann, die sich bei mäßig großen Amplituden näherungsweise auf die ersten Glieder beschränkt. Das ist gleichbedeutend mit dem Auftreten der Oktave bzw. Duodezime usw. neben dem Grundton, eine Erscheinung, die also immer zu erwarten ist, wenn die rücktreibende Kraft nicht einfach der ersten Potenz der Ablenkung proportional ist. Derartige Abweichungen von der einfachen Sinusschwingung beobachtet man fast immer bei tönenden Körpern, ebenso auch in gewissen Fällen eine Änderung der Schwingungsfrequenz mit wachsender Amplitude A. Wenn die Schwingungen elastischer Körper — um solche handelt es sich in der Akustik — auch eine andere, kompliziertere Theorie verlangen, so sind dieselben doch in ihren Grundzügen den Schwingungen materieller Punkte ähnlich, und deshalb gelten die Ergebnisse dieser einfachen Theorie näherungsweise auch für sie.

5. Kapitel.

Gedämpfte Eigenschwingungen eines Massenpunktes.

30. Hemmende, von der Geschwindigkeit abhängige Kraft. Reibung. Wenn außer der rücktreibenden, die Bewegung erzeugenden Direktionskraft $f(x)$ noch eine die Bewegung hemmende Kraft wirkt, so erlischt die eingeleitete Schwingung allmählich, sie wird gedämpft. Die vorhandene Schwingungsenergie wird dabei zur Arbeitsleistung gegen diese Kraft verbraucht und zerstreut sich aus dem schwingenden System, d. h. sie geht in andere Formen über. Bei mechanischen Systemen ist die hemmende Kraft die Reibung in ihren verschiedenen Formen wie gleitende und rollende Reibung fester Körper, Flüssigkeitsreibung usw., bei elastischen Körpern insbesondere die innere Reibung. Die erzeugte Energie ist Wärme, deren Betrag aber meist so gering ist, daß die dabei entstehende Temperaturerhöhung vernachlässigt werden kann. Zu der Energiezerstreuung durch Reibung kommt bei allen strahlenden Systemen — jeder tönende schallaussendende Körper ist ein solches — noch die durch die Strahlung bedingte hinzu. Die dadurch erzeugte Dämpfung der Schwingungen kann diejenige infolge der Reibung übertreffen, läßt sich aber theoretisch nur im Rahmen der allgemeinen Elastizitätstheorie mit Berücksichtigung der wellenförmigen Ausbreitung des Schalles behandeln.

Die hemmende Kraft hängt von der Geschwindigkeit u ab. Sie könnte außerdem noch von der Elongation x abhängen, wenn nämlich die Wirkung einer und derselben Geschwindigkeit bei verschiedenen Entfernungen von der Ruhelage verschieden groß ist. Das würde z. B. der Fall sein, wenn der Punkt in einer Flüssigkeit schwingt, deren Dichte oder Zähigkeit räumlich variiert. Wir betrachten jedoch nur den einfachen Fall, daß die Kraft bloß von der Geschwindigkeit abhängt.

Das Gesetz der Abhängigkeit kann verschieden sein. Der für die Rechnung einfachste, in der Natur häufig mit genügender Annäherung verwirklichte Fall ist derjenige, bei dem die hemmende Kraft der ersten Potenz der Geschwindigkeit proportional ist. Der Fall, daß höhere ganzzahlige oder auch beliebige nicht ganzzahlige Potenzen in Betracht kommen, führt zu nichtlinearen Differentialgleichungen, die sich nur näherungsweise lösen lassen.

31. Rücktreibende Kraft proportional der Ablenkung, hemmende Kraft proportional der Geschwindigkeit. Mathematisch leicht in strenger Form zu behandeln ist die gedämpfte Sinusschwingung. Man erhält sie, wenn die rücktreibende Kraft der Elongation x proportional, die hemmende Kraft der Geschwindigkeit $\frac{dx}{dt}$ proportional und von der Elongation unabhängig ist. Die Differentialgleichung der Bewegung wird

$$(1)\quad M\frac{d^2x}{dt^2} = -Dx - b\frac{dx}{dt} \quad \text{oder} \quad \frac{d^2x}{dt^2} + 2\delta\frac{dx}{dt} + n^2x = 0.$$

wobei

$$(2)\quad \frac{D}{M} = n^2 \quad \text{und} \quad \frac{b}{M} = 2\delta$$

gesetzt ist.

Lösungen derselben erhält man durch den Ansatz

$$(3)\quad x = ae^{\mu t},$$

wo a eine beliebige Konstante ist, die unter Umständen auch imaginär oder komplex sein kann. Die noch unbestimmte Größe μ erhält man aus der „charakteristischen Gleichung" oder „Charakteristik" obiger Differentialgleichung, die sich durch Einsetzen des Wertes (3) von x in Gl. (1) ergibt. Dabei wird nämlich, nach Absonderung eines gemeinsamen Faktors $e^{\mu t}$, als Charakteristik erhalten:

$$(4)\quad \mu^2 + 2\delta\mu + n^2 = 0,$$

woraus sich die beiden Werte μ_1 und μ_2 ergeben:

$$(5)\quad \mu_1 = -\delta + \sqrt{\delta^2 - n^2}, \quad \mu_2 = -\delta - \sqrt{\delta^2 - n^2}.$$

Man erhält also die beiden unabhängigen partikulären Integrale $e^{\mu_1 t}$ und $e^{\mu_2 t}$, die man noch mit je einer beliebigen Konstanten a_1 und a_2 multiplizieren kann. Durch Addition beider ergibt sich das allgemeine Integral, das also, wie es bei der gewöhnlichen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung sein muß, zwei willkürliche Konstanten a_1 und a_2 besitzt

$$(6)\quad x = a_1 e^{-\delta + \sqrt{\delta^2 - n^2}} + a_2 e^{-\delta - \sqrt{\delta^2 - n^2}}.$$

Zu unterscheiden sind nun die drei Fälle:

1. $\delta > n$ } starke Dämpfung; aperiodische Bewegung,
2. $\delta = n$ }
3. $\delta < n$: geringe Dämpfung; gedämpfte Sinusschwingung.

32. Gedämpfte Sinusschwingung. Für die Akustik kommt nur der dritte Fall $\delta < n$ in Betracht. Dabei wird die Quadratwurzel $\sqrt{\delta^2 - n^2}$ imaginär. Setzt man

$$\sqrt{\delta^2 - n^2} = \nu i, \qquad i = \sqrt{-1}, \tag{7}$$

also

$$\nu^2 = n^2 - \delta^2,$$

so erhalten die Exponentialfunktionen in Gl. (6) komplexe Exponenten, und man kann ihre imaginären Teile mittels der bekannten Moivreschen Formeln

$$e^{\pm zi} = \cos z \pm i \sin z$$

durch die Kosinus- und Sinusfunktion ausdrücken. Man erhält damit das allgemeine Integral x in der Form

$$x = e^{-\delta t}[(a_1 + a_2)\cos \nu t + i(a_1 - a_2)\sin \nu t]. \tag{8}$$

Diese Form ist nur noch äußerlich komplex. Denn wenn man jetzt a_1 und a_2 als konjugiert komplexe Zahlen wählt:

$$a_1 = \tfrac{1}{2}(A - Bi) \quad \text{und} \quad a_2 = \tfrac{1}{2}(A + Bi), \tag{9}$$

so geht sie in die reelle Form über:

$$x = e^{-\delta t}(A \cos \nu t + B \sin \nu t). \tag{10}$$

Setzt man weiter:

$$A = a \sin \vartheta, \quad B = a \cos \vartheta, \tag{11}$$

so kann man statt dessen auch schreiben:

$$x = a e^{-\delta t} \sin(\nu t + \vartheta). \tag{10a}$$

Die Größen a_1 und a_2 in Gl. (8), bzw. A und B in Gl. (10), bzw. a und ϑ in Gl. (10a) sind die willkürlichen Integrationskonstanten, die durch den Anfangszustand des schwingenden Punktes bestimmt werden.

In der Form (10a), wo natürlich wieder statt des Sinus bei passender Änderung der Phasenkonstante ϑ der Kosinus stehen kann, tritt der Charakter der Schwingung als gedämpfter Sinusschwingung deutlich hervor. Die Schwingungsamplitude ist hier $a e^{-\delta t}$; sie ist also variabel und nimmt mit wachsender Zeit nach einem Exponentialgesetz ab. Die Ausschläge des Punktes aus der

Ruhelage werden beständig kleiner, erfolgen aber, wie bei der ungedämpften Sinusschwingung, immer in gleichmäßigen Perioden.

33. Beziehungen zwischen Dämpfung δ, Dämpfungsverhältnis $\mathfrak{k}$, logarithmischem Dekrement $\mathfrak{d}$ und Schwingungsdauer τ. Die durch Gl. (2) Nr. 31 definierte Größe δ heißt Dämpfungskonstante, Dämpfungsmodul oder auch Dämpfung; sie gibt die Zeit an, innerhalb welcher die Amplitude $ae^{-\delta t}$ auf den e^{ten} (d. h. auf den 2,71828^{ten}) Teil der für $t = 0$ herrschenden Amplitude a herabgesunken ist. Die Frequenz der gedämpften Schwingung ν ist gemäß (7) Nr. 32 kleiner als die der ungedämpften n, und zwar um so mehr, je größer die Dämpfung δ ist; die Schwingungsdauer $\tau = \frac{2\pi}{\nu}$ ist dementsprechend größer als die der ungedämpften Schwingung T. Es ist

$$\frac{\tau}{T} = \frac{n}{\nu} = \frac{n}{\sqrt{n^2 - \delta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\delta}{n}\right)^2}} \tag{12}$$

oder

$$\frac{\tau}{T} = \frac{n}{\nu} = \frac{\sqrt{\nu^2 + \delta^2}}{\nu} = \sqrt{1 + \left(\frac{\delta}{\nu}\right)^2}.$$

Statt der Dämpfung δ wird, um die Schwingung zu charakterisieren, gewöhnlich das Dämpfungsverhältnis oder noch öfter das logarithmische Dekrement angegeben. Das Dämpfungsverhältnis $\mathfrak{k}$ ist das Größenverhältnis zweier aufeinanderfolgender Elongationen (Ausschläge aus der Ruhelage bis zur Umkehr), die beide nach derselben Seite gerichtet sind. Der Logarithmus dieses Verhältnisses ist das logarithmische Dekrement (natürliches bzw. dekadisches oder Briggsches logarithmisches Dekrement, je nach der Benutzung natürlicher oder Briggscher Logarithmen).

Das Dämpfungsverhältnis hat bei der durch (10a) dargestellten gedämpften Sinusschwingung einen konstanten Wert, nämlich

$$\mathfrak{k} = \frac{ae^{-\delta t_1} \sin(\nu t_1 + \vartheta)}{ae^{-\delta(t_1+\tau)} \sin[\nu(t_1 + \tau) + \vartheta]} = e^{\delta\tau} = e^{\frac{2\pi\delta}{\nu}}. \tag{13}$$

Das natürliche logarithmische Dekrement ist also

$$\mathfrak{d} = \log\text{nat}\,\mathfrak{k} = \delta\tau = \frac{2\pi\delta}{\nu}. \tag{14}$$

Das dekadische (Briggsche) logarithmische Dekrement $\bar{\mathfrak{d}}$ folgt hieraus in bekannter Weise durch Multiplikation des $\mathfrak{d}$ mit dem Modul des dekadischen Systems 0,43429. Umgekehrt erhält man $\mathfrak{d}$ aus dem dekadischen Dekrement $\bar{\mathfrak{d}}$ durch Division mit 0,43429 bzw. Multiplikation mit 2,30259.

Drückt man nach Gl. (14) δ durch das Dekrement $\mathfrak{d}$ aus, so kann man den Dämpfungsfaktor $e^{\delta t}$ in den Ausdrücken für x [Gl. (8) bis (10a)] auch schreiben: $e^{-\frac{\mathfrak{d}t}{\tau}}$. Hieraus folgt, daß die Amplitude $ae^{-\frac{\mathfrak{d}t}{\tau}}$ in einer Periode τ auf den $e^{\mathfrak{d}}$ten Teil der zu Anfang dieser Periode herrschenden herabsinkt; nach s Perioden ist sie auf den $e^{s\mathfrak{d}}$ten Teil gesunken, also gleich $ae^{-s\mathfrak{d}}$ geworden.

Früher — und häufig auch jetzt noch — wurde als Dämpfungsverhältnis k das Größenverhältnis zweier aufeinander folgender Ausschläge nach entgegengesetzten Seiten definiert, und dementsprechend als natürliches bzw. dekadisches logarithmisches Dekrement Λ bzw. $\bar{\Lambda}$ der Logarithmus dieser Größe. Diese Werte beziehen sich also auf die halbe Periode; ihr Zusammenhang mit den auf die ganze Periode bezogenen Werten $\mathfrak{k}$ und $\mathfrak{d}$ bzw. $\bar{\mathfrak{d}}$ ist offenbar

$$k = e^{\frac{\delta\tau}{2}} = \sqrt{\mathfrak{k}}, \qquad \Lambda = \frac{\mathfrak{d}}{2}. \tag{15}$$

Die durch Gl. (12) angegebene Vergrößerung der (ungedämpften) Schwingungsdauer T in τ durch Hinzutreten der Dämpfung läßt sich mittels des logarithmischen Dekrementes einfach ausdrücken in der bekannten Beziehung

$$\frac{\tau}{T} = \frac{\sqrt{4\pi^2 + \mathfrak{d}^2}}{2\pi} = \sqrt{1 + \left(\frac{\mathfrak{d}}{2\pi}\right)^2} \tag{16}$$

oder mit dem Dekrement der älteren Definition noch einfacher

$$\frac{\tau}{T} = \frac{\sqrt{\pi^2 + \Lambda^2}}{\pi} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Lambda}{\pi}\right)^2}. \tag{16a}$$

Die Schwingungsdauer τ läßt sich in verschiedener Form ausdrücken, nämlich außer der durch Gl. (12) und (16) gegebenen noch folgendermaßen:

$$\tau = \frac{2\pi}{\nu} = \frac{2\pi}{\sqrt{n^2 - \delta^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{D}{M} - \frac{b^2}{4M^2}}} = 2\pi\sqrt{\frac{M}{D}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{b^2}{4MD}}}. \tag{17}$$

Beispiel: Eine Kugel von der Masse 100 g sei an einer leichten Spiralfeder aufgehängt, deren elastische Kraft so groß gewählt ist, daß sie durch ein angehängtes Gewichtstück von 10,19 g um 1 cm verlängert wird. Die rücktreibende „Direktionskraft" D entspricht dann gerade 10,19 Gramm-Gewicht oder $10{,}19 \cdot 981 = 10\,000$ Dynen (da 1 g-Gew. = 981 Dynen ist). Also folgt für die Periode und Schwingungsfrequenz, die das System ohne Dämpfung haben würde:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{D}} = 2\pi\sqrt{\frac{100}{10000}} = \frac{2\pi}{10} = 0{,}6283 \text{ Sekunden},$$

und

$$n = \frac{2\pi}{T} = 10 \text{ Schwingungen in } 6{,}283 \text{ Sekunden.}$$

Ist nun die „Dämpfung" (durch Luftreibung usw.) $\delta = 0{,}725$, so wird das Dekrement (bezogen auf die ganze Periode):

$$\text{dekadisches } \bar{\mathfrak{d}} = 0{,}2000,$$

$$\text{natürliches } \mathfrak{d} = 0{,}4605.$$

Das Dämpfungsverhältnis also $\mathfrak{k} = 1{,}5849$. Ferner

Periode $\tau = T \cdot 1{,}0027$,

Kreisfrequenz $\nu = \frac{2\pi}{\tau} = \frac{n}{1{,}0027} = n(1 - 0{,}0027)$

$= 9{,}9973$ Schwingungen in 6,283 Sekunden.

Frequenz $N = \frac{\nu}{2\pi} = \frac{9{,}9973}{6{,}283} = 1{,}5911$ Schwingungen in 1 Sekunde.

Aus $\bar{\mathfrak{d}} = 0{,}2000$ folgt $10\bar{\mathfrak{d}} = 2{,}0000$, $20\bar{\mathfrak{d}} = 4{,}0000$ usw. Also sinkt die Amplitude nach der 1., 10., 20. ganzen Schwingung usw. auf den $\mathfrak{k} = 1{,}5849^{\text{ten}}$, den $\mathfrak{k}^{10} = 100^{\text{ten}}$, $\mathfrak{k}^{20} = 10000^{\text{ten}}$ Teil der Anfangsamplitude usw.; sie ist daher bei dieser starken Dämpfung schon nach 10 Schwingungen sehr schwach, nach 20 Schwingungen praktisch ganz unmerkbar.

34. Dämpfung und Abklingungszeit. Statt Dämpfungskonstante δ oder Dämpfungsverhältnis $\mathfrak{k}$ oder logarithmisches Dekrement $\mathfrak{d}$ bzw. Λ anzugeben, kann man zur Kennzeichnung der Dämpfungsstärke auch die Zeit (Abklingungszeit) oder die Anzahl s der Schwingungen angeben, nach Verlauf welcher die Ampli-

tude auf einen bestimmten Bruchteil $\frac{1}{\varrho}$, z. B. den zehnten Teil, der Anfangsamplitude herabgesunken ist. Die dazu nötige Periodenzahl erhält man bei gegebenem natürlichen Dekrement $\mathfrak{d}$ offenbar aus der Beziehung

$$ae^{-s\mathfrak{d}} = \frac{a}{\varrho}$$

als

$$s = \frac{1}{\mathfrak{d}} \log \operatorname{nat} \varrho. \tag{18}$$

Aus derselben Gleichung ergibt sich natürlich umgekehrt das Dekrement $\mathfrak{d}$, welches der durch die Werte von s und ϱ bestimmten Dämpfung entspricht.

Beispiel: Eine Stimmgabel von 128 Schwingungen (Ton c) macht Schwingungen, bei denen die Amplitude der Zinkenenden anfangs 0,5 mm, nach 10 Sekunden (entsprechend $s = 1280$ Schwingungsperioden) 0,1 mm beträgt, also auf den fünften Teil gesunken ist. Hier ist $\varrho = \frac{0,5}{0,1} = 5$, also wird das natürliche logarithmische Dekrement $\mathfrak{d} = \frac{1}{1280} \cdot \log \operatorname{nat} 5 = 0,001257$ und das dekadische Dekrement $\bar{\mathfrak{d}} = 0,0005459$.

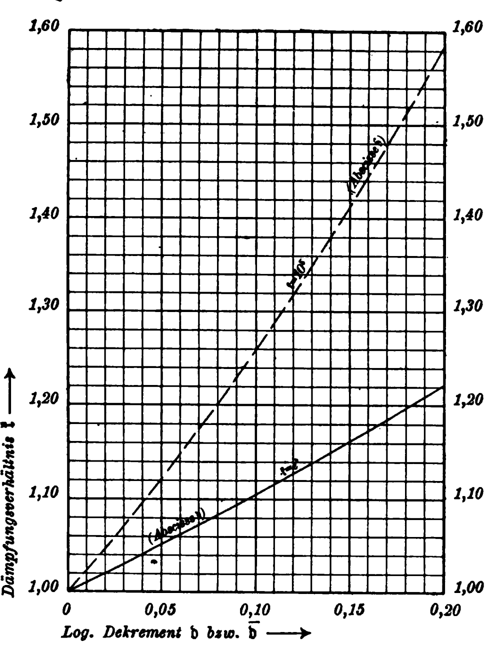


Fig. 6a.
Dämpfungsverhältnis d. gedämpften Sinusschwingung.
Abszissen: Natürliches logar. Dekrement $\mathfrak{d}$ für die ausgezogene Kurve ——— —. Dekadisches logar. Dekrement $\bar{\mathfrak{d}}$ für die gestrichelte Kurve – – – –.
Ordinaten: Dämpfungsverhältnis der Vollperiode $\mathfrak{k} = e^{\mathfrak{d}}$ (ausgezogene Kurve —— —), bzw. $\mathfrak{k} = 10^{\bar{\mathfrak{d}}}$ (gestrichelte Kurve – – – –). ($\mathfrak{k}$ = Amplitudenverhältnis der vorhergehenden zur folgenden Periode $\frac{a_{(n-1)\tau}}{a_{n\tau}}$.)

So starke Dämpfungen wie in dem Nr. 33 angeführten mechani-

Tabelle 10.

Log. Dekrement der Vollperiode: natürliches $\mathfrak{d} = \log \text{nat}\, \mathfrak{k}$	Log. Dekrement der Vollperiode: dekadisches $\bar{\mathfrak{d}} = \log \text{Brigg}\, \mathfrak{k}$	Dämpfungsverhältnis der Vollperiode $\mathfrak{k} = e^{\mathfrak{d}} = 10^{\bar{\mathfrak{d}}}$	Amplitudenabnahme nach einer Vollperiode $\frac{1}{\mathfrak{k}} = e^{-\mathfrak{d}} = 10^{-\bar{\mathfrak{d}}}$	Periodenverhältnis der gedämpften (τ) und ungedämpften (T) Schwingung $\frac{\tau}{T} = \sqrt{1 + \frac{\mathfrak{d}^2}{4\pi^2}}$
0	0	1	1	1
0,001	0,00043	1,0010	0,9990	1,0000000
002	087	20	9980	00
003	130	30	9970	01
004	174	40	9960	02
005	217	50	9950	03
006	261	60	9940	04
007	304	70	9930	06
008	347	80	9920	08
009	391	90	9910	10
0,01	0,00434	1,0101	0,9900	1,0000013
02	00869	0202	9802	0051
03	01303	0305	9704	0114
04	01737	0408	9608	0203
05	02171	0513	9512	0317
06	02606	0618	9418	0456
07	03040	0725	9324	0621
08	03474	0833	9231	0811
09	03909	0942	9139	1026
10	04343	1052	9048	1267
11	04777	1163	8958	1532
12	05212	1275	8869	1824
13	05646	1388	8781	2140
14	06080	1503	8694	2482
15	06514	1618	8607	2850
16	06949	1735	8521	3242
17	07383	1853	8437	3660
18	07817	1972	8353	4104
19	08252	2092	8270	4572
20	08686	2214	8187	5066
1	2	3	4	5

Zur Rechnung mit gedämpften Schwingungen.

Verhältnis der Perioden- bzw. Frequenzenquadrate $\frac{\tau^2}{T^2} = \frac{n^2}{\nu^2}$	Amplitudenabnahme nach einer Halbperiode $\frac{1}{k} = e^{-\Lambda} = 10^{-\bar{\Lambda}}$	Dämpfungsverhältnis der Halbperiode $k = e^{\Lambda} = 10^{\bar{\Lambda}}$	Log. Dekrement der Halbperiode: dekadisches $\bar{\Lambda} = \log \text{Brigg}\, k$	Log. Dekrement der Halbperiode: natürliches $\Lambda = \log \text{nat}\, k$
1	1	1	0	0
1,0000000	0,9995	1,0005	0,00022	0,0005
01	9990	10	043	001
02	9985	15	065	0015
04	9980	20	087	002
06	9975	25	109	0025
09	9970	30	130	003
12	9965	35	152	0035
16	9960	40	174	004
20	9955	45	195	0045
1,0000025	0,9950	1,0050	0,00217	0,005
0101	9900	0101	00434	01
0228	9851	0151	00651	015
0405	9802	0202	00869	02
0633	9753	0254	01086	025
0912	9705	0305	01303	03
1241	9656	0356	01520	035
1621	9608	0408	01737	04
2052	9560	0460	01954	045
2533	9512	0513	02171	05
3065	9465	0565	02389	055
3648	9418	0618	02606	06
4281	9371	0672	02823	065
4965	9324	0725	03040	07
5699	9277	0779	03257	075
6485	9231	0833	03474	08
7320	9185	0887	03692	085
8207	9139	0942	03909	09
9144	9094	0997	04126	095
10132	9048	1052	04343	10
6	7	8	9	10

schen Beispiel sind bei akustischen Schwingungen gewöhnlich nicht vorhanden, wenigstens bei den Schwingungen der meisten als Tonquellen benutzten Körper. Das (dekadische) Dekrement von Stimmgabeln z. B. ist sehr viel kleiner. So fand Hartmann-Kempf[1]) an Stimmgabeln von der Schwingungszahl 100 pro Sekunde bei kleinen Amplituden Werte von etwa 0,002 für das dekadische Dekrement $\bar{\mathfrak{b}}$. Dem entspricht das Dämpfungsverhältnis $\mathfrak{k} = 1{,}0046$; nach 100 Schwingungen (= 1 sek) ist die Amplitude auf den $\mathfrak{k}^{100} = 1{,}5849^{\text{ten}}$ Teil, nach 1000 (= 10 sek) auf den $\mathfrak{k}^{1000} = 100^{\text{ten}}$ Teil gesunken, nach 2000 Schwingungen

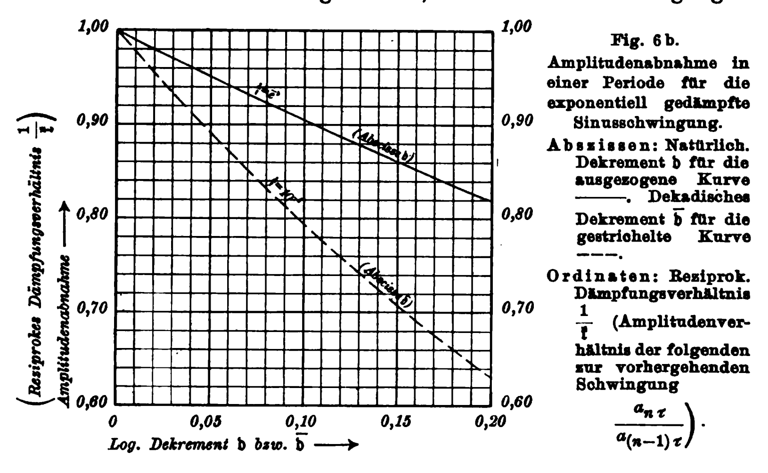


Fig. 6 b. Amplitudenabnahme in einer Periode für die exponentiell gedämpfte Sinusschwingung. Abszissen: Natürlich. Dekrement $\mathfrak{b}$ für die ausgezogene Kurve ———. Dekadisches Dekrement $\bar{\mathfrak{b}}$ für die gestrichelte Kurve – – –. Ordinaten: Reziprok. Dämpfungsverhältnis $\frac{1}{\mathfrak{k}}$ (Amplitudenverhältnis der folgenden zur vorhergehenden Schwingung $\frac{a_{n\tau}}{a_{(n-1)\tau}}$).

(= 20 sek) auf den $\mathfrak{k}^{2000} = 10000^{\text{ten}}$ Teil. Zu bemerken ist dabei noch, daß das Dekrement (und Dämpfungsverhältnis) bei diesen schwingenden elastischen Körpern durchaus nicht konstant ist, sondern mit wachsender Amplitude selbst stark anwächst, bei einer der untersuchten Gabeln von 0,00116 bis 0,00722, wenn die Amplitude (Ausbiegung der Zinken aus der Ruhelage, in Bogengraden gemessen) von $0{,}425^0$ bis $1{,}660^0$ ansteigt. Auf solche schwingenden Systeme ist also die Gleichung (10a) Nr. 32 eigentlich nicht anwendbar, da das Dämpfungsgesetz ein anderes ist. Diese Gleichung setzt konstantes Dekrement voraus, während es bei jenen Stimmgabeln nahezu linear mit der Am-

1) Hartmann-Kempf, Inaug.-Dissert. Würzburg 1903; Annalen der Physik 13 (1904), 124.

DRUCKFEHLER-BERICHTIGUNG.

In **Band I** muß es heißen:

Auf Seite 22, Z. 12 v. o. $cg_1 g_2$ statt $cc_1 g_2$.

„ „ 51, Z. 1 v. o. $\frac{D'' a^4}{4}$ statt $\frac{D'' a^4}{3}$.

„ „ 54, Z. 2 v. o. (32) statt (33).

„ „ 57, in den Kolumnenköpfen der Tabelle muß es heißen (37 a) statt (38 a).

„ „ 58, Z. 12 v. o. (37) statt (39).

„ „ 74, Z. 4. v. o. und in Gleichung (10) ist zu setzen θ statt ϑ.

„ „ 89, Z. 10 v. o. „... so steigt J von $\frac{M\varkappa^2 A^2}{2n^4}$ ..." statt „... so steigt J von Null ...".

„ „ 107, Z. 11 v. o. in Gleichung (9) ψ_1 bezw. ψ_2 usw. statt Ψ_1 bezw. Ψ_2 usw.

„ „ 108, Z. 1. v. u. hinter den Worten Koppelungskoeffizient ist einzuschalten: „oder Koppelungsparameter".

„ „ 119, hinter Gleichung (85) ist einzuschalten: „Die Dämpfung beider Schwingungen ist dieselbe, nämlich gleich derjenigen der ungekoppelten Schwingungen δ".

In **Band II** muß es heißen:

Auf Seite 90, in Gleichung (28), (29) und in Fußnote 2) $-\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ statt $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$.

„ „ 91, Z. 2 v. u. $-\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$ statt $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$.

„ „ 91, in Gleichung (30) $-\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ statt $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$.

„ „ 91, in Gleichung (31) ist als untere Integrationsgrenze p_0 statt $\bar{p}$ zu setzen und einzufügen: „p_0 ist ein beliebiger als Normalwert gewählter Druck".

„ „ 96, in Gleichung (41) und (42) ist $-\mathfrak{u}_r$ statt $\mathfrak{u}_r$ und $-u_r$ statt u_r zu setzen, oder es sind die Vorzeichen der rechten Seiten umzukehren.

Auf Seite 202, Z. 20 v. o. das Wort „stehende“ ist zu streichen.

„ „ 204, Z. 1 v. o. „... stationäre Wellen von einer noch unbekannten Zwischenform“ statt „... stehende Wellen“.

„ „ 206, Z. 8 v. o. $\Psi = \Psi^{*} \cos 2\pi Nt + \Psi^{**} \sin 2\pi Nt$ statt $\Psi = \Psi$.

„ „ 213, Z. 1 und 13 v. o. das Wort „stehende“ ist zu streichen.

„ „ 213, Z. 4 v. o. „einfache stehende Sinusform“ statt „einfache Sinusform“.

„ „ 217, Z. 10 v. o. hinter „Minima“ ist einzuschalten: „d. h. die Werte Null“.

„ „ 217, Z. 14 und 15 v. o. „... dagegen einen besonders kleinen Wert ...“ statt „... ein Minimum nimmt einen besonders kleinen Wert an ...“.

„ „ 217, Z. 21 v. o. hinter „Maxima und Minima“ ist „(Extremwerte)“ einzuschalten.

ude ansteigt. Die hier behandelte gedämpfte Sinusschwin-
ıg mit konstanter Dämpfung ist daher nur ein idealer Fall,
: von der Wirklichkeit oft erheblich abweicht. Zur strengen
handlung der ja immer gedämpften Eigenschwingungen elasti-
her Körper müßte man die verschiedenen Ursachen der Dämp-
ng (innere Reibung bei elastischen Körpern, äußere Reibung
egen das umgebende Mittel, Energieabgabe an dieses durch Erregung von Schallwellen — kurz Ausstrahlung genannt — usw.) einzeln untersuchen; dabei zeigt sich, daß man keineswegs die dämpfende Kraft einfach der ersten Potenz der Geschwindigkeit proportional setzen und den Proportionalitätsfaktor konstant annehmen darf. Es fehlen aber vorläufig noch die experimentellen Unterlagen für einen richtigen Ansatz der Bewegungsgleichung, und die mathematische Analyse bereitet Schwierigkeiten oder versagt ganz.

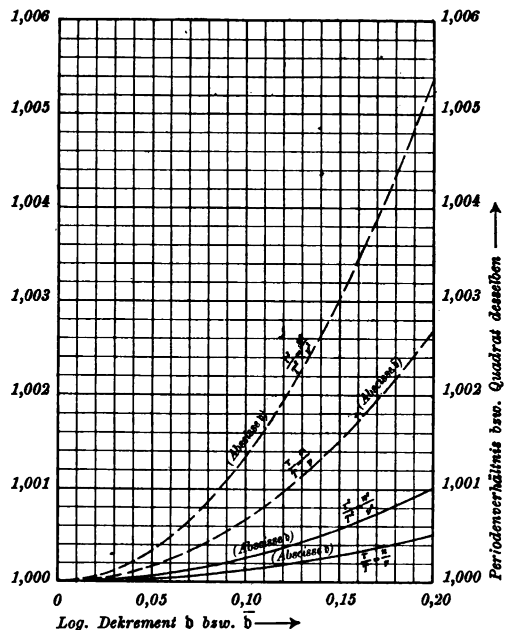


Fig. 7.

Periodenverhältnis $\frac{\tau}{T} = \frac{n}{\nu}$ und Quadrat desselben für die exponentiell gedämpfte Sinusschwingung.

Abszissen: Natürliches logar. Dekrement b für die ausgezogenen Kurven ———. Dekadisches logar. Dekrement b̄ für die gestrichelten Kurven – – – –.

Ordinaten: 1) Verhältnis der Perioden bzw. Frequenzen der gedämpften (τ, ν) und ungedämpften (T, n) Schwingung [untere ausgezogene und gestrichelte Kurve];
2) Quadrat dieses Verhältnisses [obere ausgezogene und gestrichelte Kurve].

Die Figuren 6 a, 6 b und 7 zeigen den Verlauf der für die exponentiell gedämpfte Sinusschwingung charakteristischen Größen (Dämpfungsverhältnis $\mathfrak{k}$, reziprokes Dämpfungsverhältnis oder Amplitudenabnahme in einer

Periode $\frac{1}{\mathfrak{t}}$ und Verhältnis $\frac{\tau}{T}$ der Periode der gedämpften und der ungedämpften Schwingung). Die Abszissenwerte stellen für die ausgezogenen Kurven das natürliche logarithmische Dekrement $\mathfrak{d}$, für die gestrichelten das dekadische Dekrement $\bar{\mathfrak{d}}$ dar.

6. Kapitel.

Mitschwingen und Resonanz ohne Rückwirkung. Erzwungene Schwingungen eines Massenpunktes.

35. Erzwungene Schwingungen im allgemeinen. Wenn von einem schwingenden System Wellen in das umgebende Medium ausgehen und diese auf ein zweites schwingungsfähiges System treffen, so wird es zum Mitschwingen mit dem ersten angeregt. Solche Beeinflussung findet immer statt, wie verschieden auch die Eigenschwingungsperiode des zweiten Systems von der Periode der ankommenden Wellen, also auch von der des ersten Systems sein möge. Sie wird aber besonders stark, wenn beide einander gleich (bzw. bei gedämpften Systemen nahezu gleich) sind. Man nennt die dann auftretende Erscheinung, die sich in besonders kräftiger Erregung des zweiten Systems äußert, Resonanz.

Im allgemeinen übt das zweite System, wenn es zum Schwingen gebracht ist, nun auch seinerseits eine Einwirkung auf das erste System aus. Diese Rückwirkung ist um so geringer, je kleiner die Masse bzw. das Trägheitsmoment des zweiten Systems im Vergleich zum ersten ist, und kann dann zuweilen ganz vernachlässigt werden. Die Vernachlässigung ist auch bei gleichen Massen (Trägheitsmomenten) immer dann gestattet, wenn beide Systeme weit voneinander entfernt sind und die Schwingungen sich frei ausbreiten, also nicht etwa in Röhren entlanglaufen oder durch Spiegel konzentriert werden. Denn dann trifft von der aus dem zweiten System, dem Empfänger, wieder abgegebenen Energie nur ein so geringer Bruchteil das erste, den Sender, daß dieses in seinen Schwingungen dadurch nicht merklich beeinflußt wird.

In solchen Fällen kann man ganz davon absehen, daß die Bewegung erst von einem schwingenden System erzeugt wird, und kann die Sache so ansehen, als ob eine selbständige, von äußeren Umständen unabhängige, periodische Kraft auf das empfangende

System wirkt. Andernfalls muß man Sender- und Empfangssystem in ihren Wechselwirkungen betrachten und kommt damit auf das Problem der gekoppelten Schwingungsysteme, das neuerdings eine große Bedeutung auch auf anderen Gebieten, z. B. bei elektrischen Schwingungen, gewonnen hat. Auf dem mechanisch-akustischen Gebiete spielt die Koppelung zweier Systeme eine sehr große Rolle; jede Pfeife ist z. B. ein gekoppeltes System, bestehend aus dem tonerzeugenden Teil (Lippe, Zunge) und dem tonverstärkenden (Pfeifenrohr); der strengen mathematischen Behandlung stellen sich aber meist außerordentliche Schwierigkeiten entgegen.

Bei Außerachtlassen der Koppelung und Annahme einer unabhängigen, auf das Empfangssystem wirkenden periodischen Kraft erhält man den einfachsten Fall erzwungener Schwingungen. Die treibenden Kräfte hängen hier also zum Teil von der jeweiligen Konfiguration des Systems (Ablenkung aus der Ruhelage), zum Teil nur von der Zeit (äußere oder eingeprägte periodische Kraft) ab. Dazu kommen dann die hemmenden (dämpfenden) Reibungskräfte, die von den Geschwindigkeiten abhängen.

Für den materiellen Punkt als System mit einem Freiheitsgrade erhält man somit die Differentialgleichung der Bewegung:

$$M\frac{d^2x}{dt^2} = f(x) + R\left(x, \frac{dx}{dt}\right) + S(t). \tag{1}$$

Für $f(x)$ kann man wie früher, Nr. **23** Gl. (10), $-Dx - D'x^2 - D''x^3 - \cdots$ setzen, $S(t)$ kann eine beliebige periodische Funktion der Zeit t sein, die Reibungskraft $R\left(x, \frac{dx}{dt}\right)$ wird im allgemeinen eine komplizierte Funktion der Ablenkung x und Geschwindigkeit $\frac{dx}{dt}$ sein.

36. Erzwungene Schwingungen eines Systems mit exponentiell gedämpfter sinusförmiger Eigenschwingung. Einfach wird das Problem, wenn $f(x) = -Dx$ ist und $R\left(x, \frac{dx}{dt}\right) = -b\frac{dx}{dt}$, d. h. die hemmende Kraft proportional der jeweiligen Geschwindigkeit und unabhängig von der Elongation ist. Dann hat man erzwungene Schwingungen eines Punktes, der gedämpfte sinusförmige Eigenschwingungen auszuführen vermag; ihre Differentialgleichung wird

$$(2) \qquad M\frac{d^2x}{dt^2} = -Dx - b\frac{dx}{dt} + S(t)$$

oder

$$(2a) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} + 2\delta\frac{dx}{dt} + n^2x = \frac{1}{M}S(t),$$

wenn wieder

$$(3) \qquad \frac{D}{M} = n^2 \quad \text{und} \quad \frac{b}{M} = 2\delta$$

gesetzt wird.

Das allgemeine Integral dieser linearen, aber nicht homogenen (weil die rechte Seite nicht Null, sondern gleich einer Funktion der unabhängigen Variabeln t, der Störungsfunktion, ist) Differentialgleichung zweiter Ordnung muß der Theorie gemäß zwei willkürliche Integrationskonstanten oder Parameter enthalten, mittels deren man den Anfangsbedingungen des Problems genügen kann. Irgendeine Funktion von t, die zwei solche Konstanten enthält und die Differentialgleichung befriedigt, ist ihr allgemeines Integral. Man erhält es offenbar, wenn man zu einem auf irgendwelche Weise gefundenen Integral der Gl. (2) ohne willkürliche Konstante (Hauptintegral) das allgemeine Integral der in Nr. **31** bis **34** behandelten Differentialgleichung addiert, die sich aus der vorliegenden nicht homogenen Gleichung durch Nullsetzen der rechten Seite ergibt. Man setzt also das gesuchte Integral

$$(4) \qquad x = x_1 + x_2,$$

wobei

$$(5) \qquad x_2 = \mathfrak{A}e^{-\delta t}\sin(\nu t + \vartheta)$$

sein soll. Ist x_1 ein Integral, welches der Gl. (2) genügt, so genügt auch $x_1 + x_2$ derselben, wie ohne weiteres klar ist. Die Form (5) für x_2 entspricht einem mäßigen Dämpfungsgrad ($\delta < n$) des Schwingungssystems, bei dem Eigenschwingungen möglich sind. Wäre $\delta > n$, so müßte man für x_2 die aperiodische Form Gl. (6) Nr. **31** wählen. Dadurch wird an den folgenden Entwicklungen aber nichts geändert.

37. Eingeprägte Kraft eine ungedämpfte Sinusschwingung. Für eine beliebige Form der eingeprägten oder äußeren Kraft — auch Störungsfunktion genannt — läßt sich das Integral der Gl. (2) nicht in geschlossener Gestalt angeben, wohl aber für den Fall, daß dieselbe eine einfache Sinusschwingung ist, also die Form $A\sin\varkappa t$ oder $A\cos\varkappa t$ hat, was beides

auf dasselbe hinauskommt. Die zu integrierende Gleichung ist im ersten Falle also:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\delta\frac{dx}{dt} + n^2x = A\sin\varkappa t. \tag{6}$$

Man kann sie durch Probieren lösen, indem man eine geeignet scheinende Funktion probeweise als Integral aufstellt und zusieht, ob sie allen Forderungen genügt. Es liegt nahe, als Integral x eine periodische Funktion vom gleichen Charakter wie die Störungsfunktion zu nehmen, also eine ungedämpfte Sinusfunktion, deren Amplitude und Phase aber noch unbestimmt gelassen werden. Ist dieser Ansatz richtig, so müssen diese beiden Größen sich so bestimmen lassen, daß x für alle Zeiten der Gl. (6) genügt. Tatsächlich gelingt das mit der Annahme

$$x_1 = a\sin(\varkappa t - \Theta), \tag{7}$$

wobei gleich durch die negative Phasenkonstante $-\Theta$ ausgedrückt ist, daß gewöhnlich die erzwungene Schwingung sich gegen die erregende Kraft $S(t)$ verspätet.

Führt man dieses x_1 in Gl. (6) ein und setzt dann für t solche Werte, daß die darin auftretenden trigonometrischen Funktionen bekannte einfache Werte annehmen, so kann man daraus die Größen a und Θ bestimmen. Setzt man z. B. t einmal $= 0$, ein andermal $= \frac{1}{\varkappa}\frac{\pi}{2}$, so erhält man nach einigen einfachen Umformungen:

$$2\delta\varkappa a\cos\Theta - (n^2 - \varkappa^2)a\sin\Theta = 0 \qquad \text{für } t = 0,$$

$$2\delta\varkappa a\sin\Theta + (n^2 - \varkappa^2)a\cos\Theta = A \qquad \text{für } t = \frac{\pi}{2\varkappa},$$

woraus sofort folgt:

$$\operatorname{tg}\Theta = \frac{2\delta\varkappa}{n^2 - \varkappa^2}. \tag{8}$$

oder damit gleichbedeutend:

$$\sin\Theta = \frac{2\delta\varkappa}{\sqrt{(n^2 - \varkappa^2)^2 + 4\delta^2\varkappa^2}}, \quad \cos\Theta = \frac{n^2 - \varkappa^2}{\sqrt{(n^2 - \varkappa^2)^2 + 4\delta^2\varkappa^2}} \tag{8a}$$

und

$$a = \frac{A}{(n^2 - \varkappa^2)\cos\Theta + 2\delta\varkappa\sin\Theta} = \frac{A\sin\Theta}{2\delta\varkappa} = \frac{A}{\sqrt{(n^2 - \varkappa^2)^2 + 4\delta^2\varkappa^2}}. \tag{9}$$

Für Θ ist der kleinste Winkel zu nehmen, der der Gl. (8) genügt; er liegt also immer zwischen 0 und π, und zwar gilt die Regel:

es liegt

$$\Theta \text{ zwischen } 0 \text{ und } \frac{\pi}{2}, \quad \text{wenn } n > \varkappa,$$

$$\Theta \text{ zwischen } \frac{\pi}{2} \text{ und } \pi, \quad \text{wenn } n < \varkappa.$$

Dementsprechend ist in den Ausdrücken für $\sin\vartheta$ und $\cos\vartheta$ die Quadratwurzel immer mit positivem Vorzeichen zu nehmen. Das gesuchte Hauptintegral der Gl. (6) läßt sich also in einer der folgenden Formen darstellen:

$$(10) \quad x_1 = \frac{A \sin\vartheta}{2\delta\varkappa} \sin(\varkappa t - \Theta) = \frac{A}{\sqrt{(n^2-\varkappa^2)^2 + 4\delta^2\varkappa^2}} \sin(\varkappa t - \Theta),$$

die allgemeine Lösung dementsprechend durch Hinzufügung von x_2 nach Gl. (5) z. B. in der Form:

$$(11) \quad x = \frac{A}{\sqrt{(n^2-\varkappa^2)^2 + 4\delta^2\varkappa^2}} \sin(\varkappa t - \Theta) + \mathfrak{A} e^{-\delta t} \sin(\nu t + \vartheta),$$

wo $\nu = \sqrt{n^2 - \delta^2}$ ist.

Wegen der Dämpfung wird das zweite Glied der rechten Seite, die Eigenschwingung, mit der Zeit immer kleiner und verschwindet schließlich gegen das erste, die erzwungene Schwingung, die dann praktisch allein vorhanden ist. Solange die Eigenschwingung noch merklich ist, besteht der ganze Schwingungsvorgang aus der Übereinanderlagerung beider, was sich durch periodische Schwankungen der Amplitude (und Intensität), d. h. durch Schwebungen bemerkbar macht, wenn $\varkappa$ und ν einander nahe gleich sind.

Wenn die Störungsfunktion der Gl. (6) rechts durch $A\cos\varkappa t$ statt $A\sin\varkappa t$ dargestellt wird, so tritt auch in dem partikulären Integral der erzwungenen Schwingung die Funktion $\cos(\varkappa t - \Theta)$ an die Stelle von $\sin(\varkappa t - \Theta)$, sonst ändert sich nichts. Diese Änderung bedeutet nur eine Verschiebung des Anfangspunktes der Zeit um $\frac{1}{\varkappa}\frac{\pi}{2}$.

38. Eingeprägte Kraft eine exponentiell gedämpfte Sinusschwingung. Ist die äußere Kraft oder Störungsfunktion $S(t)$ eine gedämpfte Sinusschwingung von der Form der Gl. (10a) Nr. 32, so läßt sich die erzwungene Schwingungsbewegung ganz ebenso behandeln. Die Gl. (6) Nr. 37 geht dann über in

$$(12) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} + 2\delta\frac{dx}{dt} + n^2 x = Ae^{-\varepsilon t}\sin\varkappa t,$$

und ihre allgemeine Lösung wird, wie eine einfache Rechnung zeigt,

$$(13)\quad x = x_1 + x_2 = \frac{A e^{-\varepsilon t} \sin(\varkappa t - \Theta)}{\sqrt{(n^2 - \varkappa^2 + \varepsilon^2 - 2\varepsilon\delta)^2 + 4\varkappa^2(\delta - \varepsilon)^2}} + \mathfrak{A} e^{-\delta t} \sin(\nu t + \vartheta).$$

Man erhält also als erzwungene Schwingung eine ebenfalls gegedämpfte Sinusschwingung mit der gleichen Dämpfung ε, die die erregende hat. Die Phasenverschiebung Θ ist auch vorhanden, nur hat sie, wie die Amplitude, einen anderen Wert. Die Amplitude

$$(14)\qquad a e^{-\varepsilon t} = \frac{A e^{-\varepsilon t}}{\sqrt{(n^2 - \varkappa^2 + \varepsilon^2 - 2\varepsilon\delta)^2 + 4\varkappa^2(\delta - \varepsilon)^2}}$$

kann — abgesehen von der allmählichen Verkleinerung infolge der Wirkung des dämpfenden Faktors $e^{-\varepsilon t}$ — größer oder kleiner sein als die entsprechende Amplitude bei Wirkung einer ungedämpften äußeren Kraft.

Die Phasenverschiebung Θ wird bestimmt durch

$$(15)\qquad \operatorname{tg} \Theta = \frac{2\varkappa(\delta - \varepsilon)}{n^2 - \varkappa^2 + \varepsilon^2 - 2\varepsilon\delta}$$

bzw.

$$(15\text{a})\quad \begin{cases} \sin \Theta = \dfrac{2\varkappa(\delta - \varepsilon)}{\sqrt{(n^2 - \varkappa^2 + \varepsilon^2 - 2\varepsilon\delta)^2 + 4\varkappa^2(\delta - \varepsilon)^2}} \\ \text{und} \\ \cos \Theta = \dfrac{n^2 - \varkappa^2 + \varepsilon^2 - 2\varepsilon\delta}{\sqrt{(n^2 - \varkappa^2 + \varepsilon^2 - 2\varepsilon\delta)^2 + 4\varkappa^2(\delta - \varepsilon)^2}}; \end{cases}$$

sie kann hier also auch Null werden, wenn nämlich $\varepsilon = \delta$, d. h. die Dämpfung der erregenden Schwingung gleich derjenigen der Eigenschwingung des erregten Systems ist. Wird $\varepsilon > \delta$, so kehrt sich das Vorzeichen von $\operatorname{tg} \Theta$ (und $\sin \Theta$) um, die Phasenverschiebung wird also negativ, wenn sie vorher positiv war und umgekehrt. Dieser letzte Zusatz ist nötig; denn das Vorzeichen von Θ hängt außer von dem Größenverhältnis der Dämpfungen δ und ε noch von dem Vorzeichen des Nenners in (15) ab, der in (15a) bei $\cos \Theta$ als Zähler erscheint.

Beginnt also die äußere Kraft zu einer Zeit, die man als Anfangspunkt der Zeit wählen kann, mit einer Amplitude A zu wirken, so beginnt damit ein komplizierter Schwingungszustand, der nicht wie bei der ungedämpften Erregung einem stationären Schwingungszustand zustrebt, sondern mit der Zeit immer mehr an Energie einbüßt, bis die Bewegung schließlich nach unend-

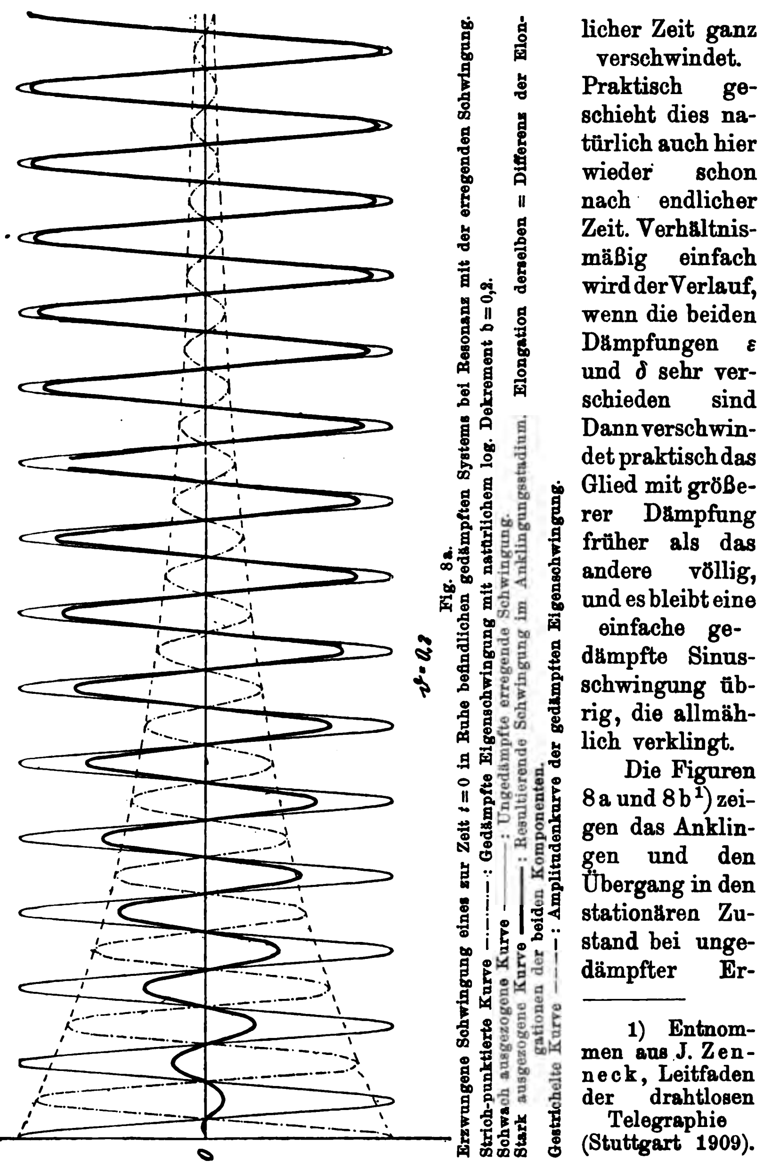


Fig. 8a.

Erzwungene Schwingung eines zur Zeit $t = 0$ in Ruhe befindlichen gedämpften Systems bei Resonanz mit der erregenden Schwingung.
Strich-punktierte Kurve —·—·—: Gedämpfte Eigenschwingung mit natürlichem log. Dekrement $\mathfrak{b} = 0{,}2$.
Schwach ausgezogene Kurve ———: Ungedämpfte erregende Schwingung.
Stark ausgezogene Kurve ———: Resultierende Schwingung im Anklingungsstadium. Elongation derselben = Differenz der Elongationen der beiden Komponenten.
Gestrichelte Kurve - - - -: Amplitudenkurve der gedämpften Eigenschwingung.

licher Zeit ganz verschwindet. Praktisch geschieht dies natürlich auch hier wieder schon nach endlicher Zeit. Verhältnismäßig einfach wird der Verlauf, wenn die beiden Dämpfungen ε und δ sehr verschieden sind Dann verschwindet praktisch das Glied mit größerer Dämpfung früher als das andere völlig, und es bleibt eine einfache gedämpfte Sinusschwingung übrig, die allmählich verklingt.

Die Figuren 8a und 8b[1]) zeigen das Anklingen und den Übergang in den stationären Zustand bei ungedämpfter Er-

1) Entnommen aus J. Zenneck, Leitfaden der drahtlosen Telegraphie (Stuttgart 1909).

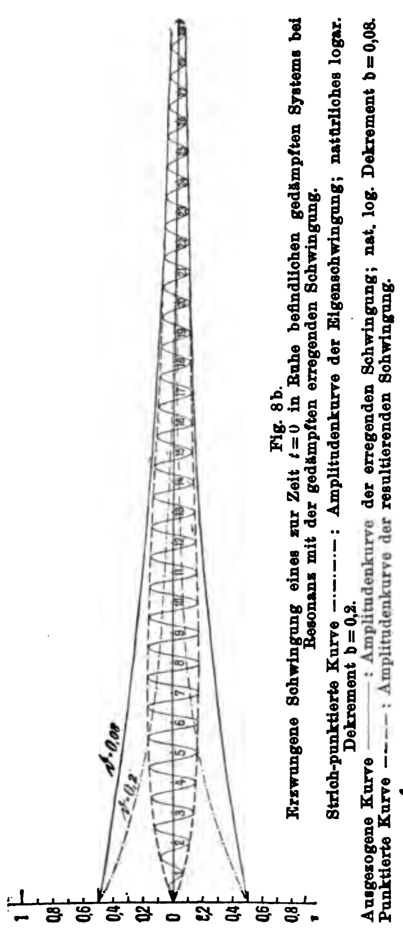


Fig. 8b.
Erzwungene Schwingung eines zur Zeit $t = 0$ in Ruhe befindlichen gedämpften Systems bei Resonanz mit der gedämpften erregenden Schwingung.
Strich-punktierte Kurve —·—·—: Amplitudenkurve der Eigenschwingung; natürliches logar. Dekrement $\mathfrak{b} = 0{,}2$.
Ausgezogene Kurve ———: Amplitudenkurve der erregenden Schwingung; nat. log. Dekrement $\mathfrak{b} = 0{,}08$.
Punktierte Kurve - - - -: Amplitudenkurve der resultierenden Schwingung.

regung, sowie das An- und Abklingen bei gedämpfter Erregung für zwei beliebig gewählte Fälle der Dämpfungen bei Resonanz zwischen Eigenschwingung und erregender Schwingung.

39. Erzwungene Schwingungen eines Massenpunktes (mit gedämpfter sinusförmiger Eigenschwingung) bei Einwirkung mehrerer (gedämpfter oder ungedämpfter) Sinusschwingungen. Wenn statt einer äußeren Kraft mit der (Kreis-)Frequenz $\varkappa$ gleichzeitig noch andere mit beliebigen anderen Frequenzen $\varkappa'$, $\varkappa''$ usw. wirken, so besteht die resultierende erzwungene Schwingung aus der Übereinanderlagerung ebenso vieler einfacher erzwungener Sinusschwingungen mit den entsprechenden Frequenzen. Das kommt daher, weil die Differentialgleichung der Bewegung linear ist, so daß das Superpositionsprinzip der Bewegung gilt, und findet auch statt, wenn die Erregerschwingungen gedämpft sind. Die Amplituden und Phasenverschiebungen berechnen sich für jede Partialschwingung nach den Formeln Nr. 37 (8) und (9) bzw. für gedämpfte nach Nr. 38 (14) und (15). Da die Amplituden nicht nur den Erregeramplituden proportional sind, sondern auch noch von den Verhältnissen der Erregerfrequenzen zur Eigenfrequenz des erregten Systems abhängen, so werden die einzelnen Partialschwingungen sich verschieden stark geltend machen, und die aus der Übereinanderlagerung resultierende, erzwungene Schwingung weicht in ihrer Form von der erregenden Schwingung ab. Am meisten kommen diejenigen Schwingungen in Betracht, deren

Frequenzen in der Nähe der Eigenfrequenz des erregten Systems liegen, wo sich also die Resonanz bemerkbar macht.

Beispiel: Die erregende Schwingung $S(t)$ als Summe einzelner gedämpfter Sinusschwingungen hat im allgemeinen die Form

$$(16)\quad S(t) = A_1 e^{-\varepsilon_1 t} \sin(\varkappa_1 t - \varphi_1) + A_2 e^{-\varepsilon_2 t} \sin(\varkappa_2 t - \varphi_2) + \cdots.$$

Zur Vereinfachung nehmen wir 1. für alle Partialschwingungen gleiche Dämpfung an, und zwar speziell dieselbe Dämpfung, welche das erregte System für seine Eigenschwingung besitzt; wir setzen also $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \cdots = \delta$. Und 2. setzen wir alle Phasenkonstanten gleich Null, also $\varphi_1 = \varphi_2 = \cdots = 0$. Das ändert an den Betrachtungen nichts Wesentliches. Es wird also die erregende Schwingung hier speziell

$$(16\text{a})\quad S(t) = A_1 e^{-\delta t} \sin \varkappa_1 t + A_2 e^{-\delta t} \sin \varkappa_2 t + \cdots.$$

Die hierdurch erzwungene Schwingung des erregten Systems ist ebenfalls keine einfache, sondern eine Summe von sinusförmigen Partialschwingungen mit den Frequenzen $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ usw. Die Amplituden stehen jedoch nicht in dem Verhältnis $A_1 : A_2 : A_3$ usw. der Amplituden der erregenden Partialschwingungen, sondern im Verhältnis $a_1 : a_2 : a_3 : \cdots$, wobei die Werte der a durch Gl. (14) Nr. **38** bestimmt sind. In dieser Gleichung ist $\varepsilon = \delta$ zu setzen, und $n^2 - \delta^2 = \nu^2$ (ν = Frequenz der gedämpften Eigenschwingung des resonierenden Systems); außerdem ist für die Quadratwurzel im Nenner immer der positive (der absolute) Wert zu nehmen. Daher wird hier

$$a_1 = \frac{A_1}{|\nu^2 - \varkappa_1^2|}, \quad a_2 = \frac{A_2}{|\nu^2 - \varkappa_2^2|} \text{ usw.}$$

Das Einschließen der Nennergrößen in Vertikalstriche bedeutet wie üblich ihren absoluten Betrag, also ohne Rücksicht auf das Vorzeichen.

Als Zahlenbeispiel diene folgendes. Eine aus den beiden Schwingungen $A_1 e^{-\delta t} \sin 100t$ und $A_2 e^{-\delta t} \sin 200t$ bestehende Erregerschwingung wirke einmal auf ein System mit der gleichen Dämpfung δ und der Eigenschwingungsfrequenz $\nu = 102$, ein anderes Mal auf ein System mit gleicher Dämpfung, aber der Eigenfrequenz $\nu' = 204$. Die Eigenfrequenzen sollen sich also jeweils um 2 Prozent von der nächstgelegenen Frequenz in der Erregerschwingung unterscheiden. Es ergibt sich für

$$\left.\begin{array}{l}\varkappa_1 = 100\\ \varkappa_2 = 200\\ \nu\ = 102\end{array}\right\}\quad \begin{array}{l} a_1 = \dfrac{A_1}{404}, \quad \dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{29596}{404}\dfrac{A_1}{A_2} = 73{,}3\,\dfrac{A_1}{A_2}\\ a_2 = \dfrac{A_2}{29596},\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l}\varkappa_1 = 100\\ \varkappa_2 = 200\\ \nu\ = 204\end{array}\right\}\quad \begin{array}{l} a_1 = \dfrac{A_1}{31616}, \quad \dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{1616}{31616}\dfrac{A_1}{A_2} = 0{,}0512\,\dfrac{A_1}{A_2}\\ a_2 = \dfrac{A_2}{1616}.\end{array}$$

Die Amplitudenverhältnisse sind sehr verschieden, im ersten Fall ist die Schwingung mit der Frequenz $\varkappa_1$, im zweiten die mit $\varkappa_2$ bevorzugt. Liegen die Frequenzen $\varkappa$, mit Ausnahme einer derselben,

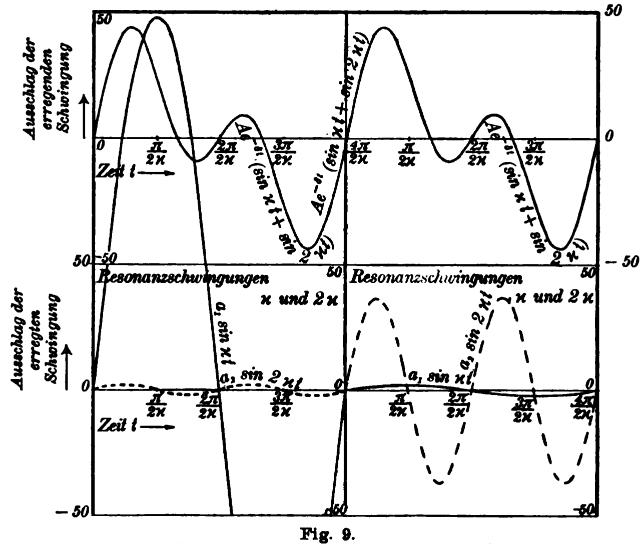


Fig. 9.

Veränderung der Form einer zusammengesetzten erregenden Schwingung durch auswählende Resonanz im erregten System.

Abszissen: Zeit t, nach Bruchteilen der Periode $\frac{2\pi}{\varkappa}$ fortschreitend

Ordinaten: (obere Hälfte der Figur) erregende Schwingung $Ae^{-\delta t}(\sin\varkappa t + \sin 2\varkappa t)$, (untere Hälfte) Komponenten $a_1 \sin\varkappa t$ und $a_2 \sin 2\varkappa t$ der erzwungenen Schwingung, links in einem Systeme mit Eigenfrequenz $\nu = \varkappa\left(1+\frac{2}{100}\right)$ und Dämpfung δ, rechts mit Eigenfrequenz $\nu = 2\varkappa\left(1+\frac{2}{100}\right)$ und Dämpfung δ.

Die erzwungene Schwingung wird fast vollkommen durch die Komponente mit der größeren Amplitude dargestellt, die mit der betreffenden Komponente der erregenden Schwingung nahezu in Resonanz ist. Die gesamte resultierende Schwingung hat jedoch wegen der gleichzeitig vorhandenen Eigenschwingung eine wesentlich andere Form.

hinreichend (d. h. im Verhältnis zur Dämpfung hinreichend) weit von der Eigenfrequenz ν entfernt, so kommt also praktisch nur diese eine in der erzwungenen Schwingung des erregten Systems in Betracht. Auf dieser auswählenden Eigenschaft des resonierenden Systems beruht ganz allgemein die Anwendung von Resonatoren mit ausgeprägter Eigenfrequenz, sowohl zur Analyse von komplizierten Schwingungen als auch zur Reinigung und Befreiung einer speziell gewünschten Schwingung von anderen, die bei der Erzeugung der Schwingung unerwünschterweise mit entstanden sind. Auf mechanischem Gebiet ist der Frahmsche Frequenzmesser mit einer Anzahl nebeneinander befestigter schwingender Metallzungen verschiedener Eigenperioden ein Beispiel. In der Akustik ist an die bekannte Erscheinung zu erinnern, daß beim Singen gegen den Resonanzboden eines Klaviers immer gewisse Saiten mit- und nachklingen, deren Töne den in dem gesungenen Klang enthaltenen Partialtönen entsprechen; ferner an das optische Telephon von M. Wien, eine Membran auf einem Kugelresonator, deren Schwingungen mittels eines leichten, mit ihr verbundenen Spiegelchens optisch untersucht werden können, und andere auf Resonanzwirkung beruhende Anwendungen.

Sind die Erregungsamplituden A_1 und A_2 gleich groß, so ist in dem gewählten Beispiel im ersten Falle a_1 73,3 mal größer als a_2, im zweiten Falle 19,6 mal kleiner als a_2. Graphisch erhält man demnach die umstehenden Schwingungsbilder (Figur 9). Ganz ähnlich liegen die Verhältnisse bei beliebiger Dämpfung der Erregerschwingungen, die natürlich auch den Wert Null haben kann.

40. Erregende (eingeprägte) äußere Kraft von beliebiger Form. Die erregende äußere Kraft ist in Nr. **39** in der sehr allgemeinen Form einer aus gedämpften sinusförmigen Partialschwingungen zusammengesetzten, komplizierten Schwingung angenommen worden. Sie ist also im allgemeinen weder streng noch annähernd periodisch. Nur wenn die Dämpfung aller Partialschwingungen, wie in dem durchgeführten Beispiel, gleich groß ist, die Dämpfungskonstanten also alle denselben Wert haben, ist die Kraft annähernd periodisch, falls ε hinreichend klein ist. Sie wird streng periodisch erst bei völligem Fehlen der Dämpfung und läßt sich dann immer durch Fouriersche Reihen, also durch Übereinanderlagerung ungedämpfter harmonischer Sinusschwingungen darstellen, wie kompliziert auch ihre Form sein möge. Und diese Darstellung hat dabei ihre physikalische Berechtigung.

Letzteres gilt (vgl. Nr. 9 und 11) aber für eine gedämpfte oder nichtstationäre Kraft durchaus nicht ohne weiteres. Man kann zwar auch diese, wie dort besprochen, ebenfalls durch Fourierreihen mit ungedämpften Sinusgliedern darstellen, aber die Auswahl der Grundperiode ist dabei ganz willkürlich. Bei schwacher Dämpfung ist es daher vorzuziehen, daß man sie überhaupt vernachlässigt und die gegebene Funktion als streng periodisch ansieht. Das ist der bei der Ausmessung und Bearbeitung von Klangkurven gewöhnlich eingeschlagene Weg, soweit es sich um nicht ganz stationäre Erscheinungen handelt. Glücklicherweise sind auch die Dämpfungen in der Akustik meist so klein, daß dies Verfahren zulässig ist. Richtiger wäre es freilich, die vorgegebene nicht stationäre Kraft in gedämpfte Sinusschwingungen zu zerlegen; dabei fehlt aber jeder Anhalt für die Bestimmung der Dämpfungen und der Perioden der einzelnen Partialschwingungen. Sogar das Dämpfungsgesetz braucht für sie nicht dasselbe und vor allem nicht gerade das exponentielle zu sein. Der infolgedessen möglichen Mannigfaltigkeit gegenüber versagt hier die Analyse. Sie hat aber auch akustisch keinen besonderen Wert, solange über die Dämpfungsgesetze der akustischen Schwingungen nicht genaueres Material vorliegt, und vor allem, solange man nicht ganz Bestimmtes darüber weiß, wie stark und welcher Art die Dämpfung einer einfachen Sinusschwingung sein darf, ohne daß der entsprechende akustische Reiz aufhört, als einfacher Ton empfunden zu werden, und welches dann gegebenenfalls der von einer stark gedämpften Schwingung erzeugte Gehörseindruck ist.

Erleichtert wird die Behandlung solcher komplizierten Schwingungsvorgänge dadurch, daß die Frequenzen der einzelnen Komponenten meist so weit auseinander liegen, daß das resonierende System praktisch nur auf eine von ihnen anspricht, so daß die anderen ganz vernachlässigt werden können. Erschwerend ist der Umstand, daß die Dämpfung derselben, abweichend von dem oben durchgerechneten idealen Fall, fast immer verschieden ist. Die beim Anschlagen einer Stimmgabel, einer Glocke usw. erregten Partialschwingungen verklingen teils rascher, teils langsamer, so daß die Klangfarbe sich während des Abklingens ändert.

41. Erzwungene Schwingungen eines Systems mit nicht sinusförmiger Eigenschwingung. Ein schwingungsfähiges System, bei dem die Direktionskraft nicht konstant, die rücktreibende

Kraft also nicht der ersten Potenz der Ablenkung proportional ist, kann ebenfalls erzwungene Schwingungen ausführen; eine sinusförmige Erregerschwingung erzeugt jedoch nicht wieder eine sinusförmige Schwingung, sondern eine kompliziertere, die man näherungsweise als Übereinanderlagerung mehrerer Sinusschwingungen ansehen kann. Umgekehrt ist zur Erzeugung einer erzwungenen einfachen Sinusschwingung nötig, daß die Erregerschwingung eine bestimmte, von der Sinusform abweichende Form hat. Man erhält diese leicht, indem man in die Differentialgleichung der erzwungenen Schwingung Nr. **35** (1) bzw. Nr. **36** (2) für x den Wert $a \sin \varkappa t$ bzw. $a \cos \varkappa t$ einsetzt und daraus $S(t)$ bestimmt. Sind in der rücktreibenden elastischen Kraft, die für die Eigenschwingungen des erregten Systems maßgebend ist, dem Quadrat der Ablenkung proportionale Glieder vorhanden, so muß die erregende Schwingung außer Komponenten mit der Frequenz $\varkappa$ auch solche von der Frequenz $2\varkappa$ enthalten; bei der dritten Potenz der Ablenkung proportionalen Gliedern in der rücktreibenden Kraft sind Komponenten mit den Frequenzen $\varkappa$ und $3\varkappa$ in der Erregerschwingung nötig usw. In allen Fällen müssen die Amplituden und Phasen dieser Komponenten der erregenden Schwingung in bestimmten Beziehungen zueinander stehen, damit die erzwungene Schwingung wirklich einfach sinusförmig wird.

Weit wichtiger ist aber der eingangs angedeutete Fall einer einfachen sinusförmigen Erregerschwingung und der allgemeinere einer Erregerschwingung, die aus Sinuskomponenten mit beliebigen Amplituden, Phasen und Frequenzen besteht. Die Lösung läßt sich im allgemeinen nicht streng und in geschlossener Form angeben. Man kann aber Näherungslösungen finden, die gemäß der Fourierschen Reihenentwicklung eine Übereinanderlagerung von Sinusschwingungen mit harmonisch steigenden Frequenzen ergeben.

42. Helmholtzsche Theorie der Kombinationstöne. Aus der großen Mannigfaltigkeit der möglichen Fälle — es kann ja die Anzahl der Erregerkomponenten, ferner das Gesetz der rücktreibenden elastischen Kraft und auch das Dämpfungsgesetz beliebig angenommen werden — wählen wir den von Helmholtz[1]) zur Erklärung der Kombinationstöne (vgl. Bd. II) herangezogenen

1) H. Helmholtz, Lehre von den Tonempfindungen, Beilage XII, oder Poggendorffs Annalen der Physik u. Chemie **49** (1856), 497.

Fall zweier Sinuskomponenten mit den Frequenzen p und q. Er soll jedoch gleich in der von Waetzmann[1]) unter Berücksichtigung der Dämpfung erweiterten Form hier vorgetragen werden.

Helmholtz nimmt die rücktreibende Kraft in der Form $ax + bx^2$ an, also proportional der ersten und zweiten Potenz der Ablenkung, was unsymmetrische Elastizität bedingt. Man könnte übrigens in derselben Weise auch andere Formen der Direktionskraft behandeln. Die Dämpfung wird proportional der jeweiligen Geschwindigkeit $\frac{dx}{dt}$ angenommen. Somit wird die Differentialgleichung der erzwungenen Bewegung des Massenpunktes

$$(17)\quad M\frac{d^2x}{dt^2} = -ax - bx^2 - k\frac{dx}{dt} - f\sin pt - g\sin(qt+c)$$

oder

$$(17\text{a})\quad \frac{d^2x}{dt^2} + n^2x + \alpha x^2 + 2\delta\frac{dx}{dt} + f'\sin pt + g'\sin(qt+c) = 0.$$

Helmholtz integriert diese Gleichung durch ein Näherungsverfahren, indem er das gesuchte x als Summe einer (unendlichen) Zahl von Komponenten darstellt:

$$(18)\quad x = \eta x_1 + \eta^2 x_2 + \eta^3 x_3 + \cdots.$$

Die Reihe steigt nach Potenzen der neu eingeführten willkürlichen Hilfsgröße η an, und es wird vorausgesetzt, daß sie konvergiert. Zur Vereinfachung wird noch gesetzt:

$$(19)\quad f = \eta f_1,\quad g = \eta g_1 \quad \text{bzw.} \quad f' = \eta f_1',\quad g' = \eta g_1'.$$

Durch Einsetzen des Ausdrucks (18) für x in Gl. (17) erhält man darin Glieder mit η als Faktor, ferner solche mit η^2, wieder andere mit η^3 als Faktor usw. Faßt man die Glieder gleicher Potenzen von η zusammen, so kann man die Differentialgleichung erfüllen, indem man die so gewonnenen Koeffizienten von η, η^2, η^3 usw. sämtlich gleich Null setzt. Dadurch erhält man die simultanen Differentialgleichungen:

$$(20)\begin{cases} M\frac{d^2x_1}{dt^2} + k\frac{dx_1}{dt} + ax_1 + f_1\sin pt + g_1\sin(qt+c) = 0, \\ M\frac{d^2x_2}{dt^2} + k\frac{dx_2}{dt} + ax_2 + bx_1^2 = 0, \\ M\frac{d^2x_3}{dt_2} + k\frac{dx_3}{dt} + ax_3 + 2bx_1x_2 = 0 \end{cases}$$

1) E. Waetzmann, Annalen der Physik **24** (1907), 69.

bzw.

$$(20\text{a})\begin{cases} \frac{d^2x_1}{dt^2} + 2\delta\frac{dx_1}{dt} + n^2x_1 + f_1'\sin pt + g_1'\sin(qt+c) = 0, \\ \frac{d^2x_2}{dt^2} + 2\delta\frac{dx_2}{dt} + n^2x_2 + \alpha x_1^2 = 0, \\ \frac{d^2x_3}{dt^2} + 2\delta\frac{dx_3}{dt} + n^2x_3 + 2\alpha x_1 x_2 = 0, \end{cases}$$

wenn gesetzt wird:

$$(21)\quad \frac{a}{M} = n^2, \quad \frac{b}{M} = \alpha, \quad \frac{k}{M} = 2\delta, \quad \frac{f_1}{M} = f_1', \quad \frac{g_1}{M} = g_1'.$$

Die erste von diesen liefert nach Nr. 37 (11) bzw. Nr. 39 als vollständiges Integral:

$$(22)\quad \begin{cases} x_1 = \mathfrak{A}e^{-\delta t}\sin(\nu t + \Theta) - \frac{f_1'\sin(pt-\chi)}{\sqrt{(n^2-p^2)^2+4p^2\delta^2}} \\ \qquad\qquad - \frac{g_1'\sin(qt+c-\psi)}{\sqrt{(n^2-q^2)^2+4q^2\delta^2}}, \end{cases}$$

wobei die Phasenkonstanten χ und ψ bestimmt sind durch

$$(23)\qquad \operatorname{tg}\chi = \frac{2p\delta}{n^2-p^2} \quad \text{und} \quad \operatorname{tg}\psi = \frac{2q\delta}{n^2-q^2}.$$

Wegen der Dämpfung verschwindet das erste Glied von x_1 nach einiger Zeit praktisch ganz, und die Schwingungsbewegung wird in erster Näherung dargestellt durch

$$(24)\qquad x_1 = \varrho\sin(pt-\chi) + \sigma\sin(qt+c-\psi),$$

wobei zur Abkürzung gesetzt ist:

$$(25)\quad -\frac{f_1'}{\sqrt{(n^2-p^2)^2+4p^2\delta^2}} = \varrho \quad \text{und} \quad -\frac{g_1'}{\sqrt{(n^2-q^2)^2+4q^2\delta^2}} = \sigma.$$

Dieser Wert von x_1 wird nun in die zweite der simultanen Differentialgleichungen (20) eingesetzt; dadurch erhält man wieder die Gleichung einer erzwungenen sinusförmigen Schwingung. Die erregende Schwingung enthält jetzt aber Glieder mit den Frequenzen $2p$, $2q$, $p+q$ und $p-q$; denn es läßt sich schreiben:

$$\begin{aligned} \alpha x_1^2 &= \alpha\varrho^2\sin^2(pt-\chi) + \alpha\sigma^2\sin(qt+c-\psi) \\ &\qquad + 2\alpha\varrho\sigma\sin(pt-\chi)\sin(qt+c-\psi) \\ &= \frac{\alpha\varrho^2}{2} + \frac{\alpha\sigma^2}{2} - \frac{\alpha\varrho^2}{2}\cos(2pt-2\chi) - \frac{\alpha\sigma^2}{2}\cos(2qt+2c-2\psi) \\ &\qquad - \alpha\varrho\sigma\cos[(p+q)t+c-(\chi+\psi)] \\ &\qquad + \alpha\varrho\sigma\cos[(p-q)t-c-(\chi-\psi)]. \end{aligned}$$

Die Lösung dieser Gleichung ist — abgesehen von einem jetzt gleich vernachlässigten gedämpften Gliede —

$$(26)\begin{cases} x_2 = -\frac{\alpha}{2n^2}(\varrho^2+\sigma^2) + \frac{\alpha\varrho^2\cos(2pt-\chi')}{2\sqrt{(n^2-4p^2)^2+16p^2\delta^2}} \\ + \frac{\alpha\sigma^2\cos(2qt-\psi')}{2\sqrt{(n^2-4q^2)^2+16q^2\delta^2}} - \frac{\alpha\varrho\sigma\cos[(p-q)t-\chi'']}{\sqrt{[n^2-(p-q)^2]^2+4(p-q)^2\delta^2}} \\ + \frac{\alpha\varrho\sigma\cos[(p+q)t-\psi'']}{\sqrt{[n^2-(p+q)^2]^2+4(p+q)^2\delta^2}}, \end{cases}$$

wobei χ', ψ', χ'' und ψ'' die Phasenkonstanten sind, die sich aus der Verzögerung der erzwungenen Schwingungen und den Konstanten der erregenden zusammen ergeben. Ihr Wert kommt hier aber nicht weiter in Betracht. Das Wesentliche ist das Auftreten von Gliedern mit den Frequenzen $2p$, $2q$, $p-q$ und $p+q$ in x_2, die damit in den Ausdruck (18) für die Elongation x der erzwungenen Schwingung eingehen, obwohl die erregende Schwingung nur die Frequenzen p und q besitzt. Durch Einsetzen von x_2 in die dritte simultane Differentialgleichung (20) würde man ein drittes Näherungsglied x_3 erhalten und damit noch Glieder mit den Frequenzen $3p$, $3q$, $2p-q$, $2p+q$, $p-2q$, $p+2q$ außer p und q; die folgende Annäherung x_4 würde Kombinationen noch höherer Ordnung liefern usw.

43. Bildungsgesetz der Helmholtzschen Kombinationstöne. Differenz- und Summationstöne. Die gleichzeitige Einwirkung zweier erregender Sinusschwingungen auf ein Schwingungssystem, bei welchem die rücktreibende Kraft von der ersten und zweiten Potenz der Ablenkung abhängt, erzeugt also nach dieser mathematischen Analyse eine komplizierte erzwungene Schwingung, die sich näherungsweise durch Übereinanderlagerung einer Reihe von Sinusschwingungen darstellen läßt, deren Frequenzen durch Addition und Subtraktion ganzzahliger Vielfacher der erregenden Frequenzen entstehen. Genau dasselbe Resultat erhält man übrigens, wie schon bemerkt wurde, wenn die rücktreibende Kraft außer von der ersten noch von beliebig vielen ganzzahligen Potenzen der Ablenkung abhängt; nur die Amplituden der einzelnen Glieder bekommen andere Werte.

Die so entstandenen Teilschwingungen werden — soweit sie dem akustischen Gebiet angehören — Kombinationstöne genannt. Gemäß dem besonderen Bildungsgesetz der Frequenzen

Tabelle 11.

Theoretisch mögliche Kombinationstöne (Summations- und Differenztöne) 1. bis 4. Ordnung der Primärtöne p und q.

m \ n	0	1	2	3	4
0		q $640 = e_2$	$2q$ $1280 = e_3$	$3q$ $1920 = h_3$	$4q$ $2560 = e_4$
1	p $512 = c_2$	$p+q$ $1152 = d_3$ $q-p$ $128 = c$	$p+2q$ $ais_3 < 1792 < b_3$ $2q-p$ $768 = g_2$	$p+3q$ $dis_4 < 2432 < es_4$ $3q-p$ $f_3 < 1408 < fis_3$	$p+4q$ $3072 = g_4$ $4q-p$ $2048 = c_4$
2	$2p$ $1024 = c_3$	$2p+q$ $as_3 < 1664 < a_3$ $2p-q$ $384 = g_1$	$2p+2q$ $2304 = d_4$ $2q-2p$ $256 = c_1$	$2p+3q$ $fis_4 < 2944 < ges_4$ $3q-2p$ $ais_2 < 896 < b_2$	$2p+4q$ $ais_4 < 3584 < b_4$ $4q-2p$ $1536 = g_3$
3	$3p$ $1536 = g_3$	$3p+q$ $cis_4 < 2176 < des_4$ $3p-q$ $ais_2 < 896 < b_2$	$3p+2q$ $f_4 < 2816 < fis_4$ $3p-2q$ $256 = c_1$	$3p+3q$ $a_4 < 3456 < ais_4$ $3q-3p$ $384 = g_1$	$3p+4q$ $4096 = c_5$ $4q-3p$ $1024 = c_3$
4	$4p$ $2048 = c_4$	$4p+q$ $eis_4 < 2688 < f_4$ $4p-q$ $f_3 < 1408 < fis_3$	$4p+2q$ $as_4 < 3328 < a_4$ $4p-2q$ $768 = g_2$	$4p+3q$ $ces_5 < 3968 < his_4$ $4p-3q$ $128 = c$	$4p+4q$ $4608 = d_5$ $4q-4p$ $512 = c_2$
1	2	3	4	5	6

unterscheidet man Summations- und Differenztöne. Das allgemeine, beiden gemeinsame Bildungsgesetz der Frequenz ist

$$\omega_{m,n} = mp \pm nq, \tag{27}$$

wobei m und n beliebige positive ganze Zahlen (einschließlich der Null) sind. Wenn die Differenz einen negativen Wert ergibt, so ist statt dessen einfach der gleich große positive Wert zu nehmen, da ein negativer Wert des Winkels nur eine Phasenverschiebung um 180° bei der Sinusfunktion bedeutet.

Beispiel: Die beiden einfachen Töne c_3 und e_3 der natürlichen diatonischen Durskala (vgl. Nr. 17), also Sinusschwingungen mit den Frequenzen 512 und 640, erzeugen in einem resonierenden System, dessen rücktreibende Kraft nicht einfach der ersten Potenz der Ablenkung proportional ist, eine aus folgenden Teilschwingungen bestehende Schwingung:

c(128), c_1(256), g_1(384), c_2(512), e_2(640), g_2(768), $ais_2 < i_2 < b_2$(896), c_3(1024), d_3(1152), e_3(1280), $f_3 < \varphi_3 < fis_3$(1408), g_3(1536), $as_3 < \alpha_3 < a_3$ (1664), $ais_3 < i_3 < b_3$(1792), b_3(1920), c_4(2048), $cis_4 < \zeta_4 < des_4$(2176), d_4(2304), $dis_4 < \delta_4 < es_4$(2432), e_4(2560), $eis_4 < \varepsilon_4 < f_4$(2688), $f_4 < \varphi_4 < fis_4$(2816), $fis_4 < \gamma_4 < ges_4$(2944), g_4(3072), $as_4 < \alpha_4 < a_4$(3328), $a_4 < \beta_4 < ais_4$(3456), $ais_4 < i_4 < b_4$(3584), $ces_5 < \eta_4 < his_4$(3968), c_5(4096), d_5(4608) usw.

Mit $i, \varphi, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \eta$ sind Töne bezeichnet, die mit keinem Ton der enharmonischen Leiter genau übereinstimmen. Die Bildungsweise der einzelnen Schwingungen ergibt sich aus beistehender Tabelle, in der die vertikalen Reihen nach Vielfachen des Tones p, die horizontalen nach Vielfachen von q fortschreiten, und die alle nach obiger Theorie möglichen Kombinationstöne bis zur vierten Ordnung umfaßt (Tabelle 11).

Die Intensität, mit welcher die einzelnen Kombinationstöne in dem Klange enthalten sind, hängt außer von der Form der rücktreibenden Direktionskraft sehr wesentlich davon ab, wie nahe ihre Schwingungszahl derjenigen einer Eigenschwingung des erregten Systems liegt. Durch die hierbei auftretenden Resonanzerscheinungen können manche Kombinationstöne besonders bevorzugt werden.

Ganz allgemein läßt sich über die Intensität der Teilschwingungen also nichts aussagen. Wenn aber die rücktreibende ela-

stische Kraft nur wenig von dem Gesetz der Proportionalität mit der Ablenkung aus der Ruhelage abweicht, so sind die Koeffizienten b (und erst recht die folgenden c usw.) in den Gl. (20) Nr. **42** klein gegen den ersten a, und die Amplituden der Kombinationstöne nehmen dann mit steigender Ordnungszahl im allgemeinen ab mit Ausnahme der zufällig durch Resonanz verstärkten.

Daß die im vorstehenden skizzierte Helmholtzsche Theorie für die wirklich gehörten Kombinationstöne die richtige Erklärung ist, wird von einigen Autoren, insbesondere Physiologen, bestritten. Zweifellos sind die beobachteten Töne in manchen Fällen, wie es auch schon von Helmholtz geschehen ist, anders zu erklären. Sie werden dann aber besser nicht als Kombinationstöne, sondern als Variations-, Unterbrechungstöne usw. bezeichnet. (Vgl. Bd. II.) Für die eigentlichen Kombinationstöne ist jedoch die Helmholtzsche Theorie bis jetzt die einzige physikalisch und mathematisch brauchbare Erklärung. Über die Frage nach ihrem Entstehungsort und ihre subjektive oder objektive Existenz wird in einem späteren Kapitel berichtet werden.

44. Amplitude und Intensität des Mitklingens. Resonanzkurve. Die Gl. (14) und (15) Nr. **38** für Amplitude und Phase des mitschwingenden Systems zeigen, daß die Amplitude der erzwungenen Schwingung in ziemlich komplizierter Weise von den Dämpfungen δ und ε, sowie den Schwingungszahlen $\varkappa$ der erregenden und der (ungedämpften) Eigenschwingung n des erregten Systems abhängt. Einfach zu übersehen ist der Fall, wo die Erregerschwingung ungedämpft, also $\varepsilon = 0$ ist.

I. Läßt man hier bei gleichbleibender Erregeramplitude die Erregerfrequenz $\varkappa$ alle Werte von 0 bis ∞ durchlaufen, so steigt die erregte Amplitude a von $\frac{A}{n^2}$ zu einem Maximum und fällt darauf wieder bis zu 0. Das Amplitudenmaximum tritt ein, wenn

$$\varkappa_r^2 = n^2 - 2\delta^2 = \nu^2 - \delta^2 \tag{28}$$

ist ($\varkappa_r$ = Resonanzfrequenz), und beträgt

$$a_r = \frac{A}{2\delta\sqrt{n^2 - \delta^2}} = \frac{A}{2\delta\nu} \tag{29}$$

(Resonanzamplitude a_r bei konstanter Erregeramplitude A).

II. Wichtiger als bezüglich der Amplitude ist das Verhalten bezüglich der Intensität (Energie) des Mitschwingens. Gemäß

Nr. 25 Gl. (20) ist die Energie (Intensität) J der erzwungenen sinusförmigen Schwingung (M Masse, $\varkappa$ Kreisfrequenz, a Amplitude):

$$J = \frac{M}{2}\varkappa^2 a^2,$$

also mit Rücksicht auf Nr. 38 Gl. (14) bzw. Nr. 37 (9):

$$(30) \qquad J = \frac{M}{2}\frac{A^2 \sin^2\vartheta}{4\delta^2} = \frac{M A^2 \varkappa^2}{2[(n^2 - \varkappa^2)^2 + 4\delta^2\varkappa^2]}.$$

Läßt man hier wieder die Erregerfrequenz $\varkappa$ von 0 bis ∞ wachsen, diesmal aber bei gleichbleibender Erregerenergie, so daß also das Produkt $A^2\varkappa^2$ und nicht die Amplitude A konstant bleibt, so steigt J von Null zu einem Maximum J_r und fällt dann wieder auf Null. Das Maximum der Intensität wird auch wieder erreicht, wenn wie in (28)

$$(28) \qquad \varkappa_r^2 = n^2 - 2\delta^2 = \nu^2 - \delta^2$$

ist, und beträgt

$$(31) \qquad J_r = \frac{M}{2}\frac{A^2\varkappa^2}{4\delta^2(n^2 - \delta^2)} = \frac{ME}{8\delta^2\nu^2}$$

(Resonanzintensität J_r bei konstanter Erregerintensität),

wobei $E = A^2\varkappa^2$ bis auf einen Proportionalitätsfaktor die Energie (Intensität) der Erregerschwingung ausdrückt. Die Lage der Maxima erhält man natürlich nach dem bekannten Verfahren der Differentialrechnung für die Bestimmung der Maxima und Minima von Funktionen.

III. Anders wird die Sache, wenn man bei der Variation der Frequenz $\varkappa$ nicht die Energie, sondern die Amplitude der Erregerschwingung konstant hält. Dann erhält man ein Intensitätsmaximum der erzwungenen Schwingung, wenn

$$(32) \qquad \varkappa_r^2 = n^2 = \nu^2 + \delta^2$$

ist. Dasselbe beträgt:

$$(33) \qquad \overline{J}_r = \frac{M}{2}\cdot\frac{A^2}{4\delta^2}$$

(Resonanzintensität $\overline{J}_r$ bei konstanter Erregeramplitude A).

Dieses Maximum liegt also an anderer Stelle, und zwar muß die Erregerschwingung hierbei eine höhere Frequenz haben als im vorigen Falle; sie muß gleich der natürlichen Frequenz n sein, welche das resonierende System ohne Dämpfung haben würde,

während sie im andern Fall nach Gl. (28) noch kleiner sein muß als die durch die Dämpfung schon verkleinerte Eigenfrequenz ν des resonierenden Systems.

Graphisch erhält man, indem man die Amplitude a bzw. Intensität J als Ordinaten und die Erregerfrequenzen $\varkappa$ als Abszissen aufträgt, sogenannte **Resonanzkurven**. Die Figur 10 gibt den typischen Verlauf für die besprochenen drei Fälle.

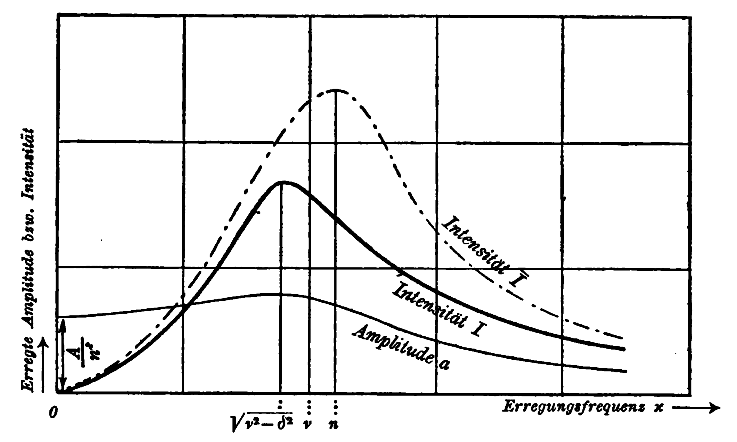


Fig. 10. Resonanzkurven für Amplitude und Intensität.
Abszissen: Frequenz $\varkappa$ der ungedämpften erregenden Schwingung.
Ordinaten:
——— Amplitude a der erzwungenen Schwingung bei konstanter Amplitude der erregenden,
—·—·— Intensität $\bar{J}$ der erzwungenen Schwingung bei konstanter Amplitude der erregenden.
——— Intensität J der erzwungenen Schwingung bei konstanter Intensität der erregenden.
Die Maxima liegen bei den Abszissen (Resonanzfrequenzen) $n = \sqrt{\nu^2 + \delta^2}$ und $\sqrt{n^2 - 2\delta^2} = \sqrt{\nu^2 - \delta^2}$.

Ist die erregende Schwingung gedämpft (Dämpfung ε), so erhält man nach demselben Verfahren als Resonanzfrequenzen, bei denen die erzwungene Schwingung maximale Amplitude bzw. Intensität besitzt, für Fall I und II $\varkappa_r^2 = \nu^2 - (\delta - \varepsilon)^2$, für Fall III $\varkappa_r^2 = \nu^2 + (\delta - \varepsilon)^2$. Durch Einsetzen dieser Werte in Gl. (14) Nr. 38 ergibt sich die Resonanzamplitude und weiter die Resonanzintensität der erzwungenen Schwingung. Man kann aber hier nicht mit letzterer allein rechnen, sondern muß die resultierende Schwingung betrachten, die sich aus der erzwungenen und

der natürlichen oder Eigenschwingung zusammensetzt und im allgemeinen sehr kompliziert ist. Die Berechnung der Resonanz in diesem Falle hat V. Bjerknes[1]) für elektrische Systeme durchgeführt.

45. Schärfe der Resonanz. Je kleiner die Dämpfung δ ist, desto größer werden, wie die Gl. (29) bis (33) Nr. **44** zeigen, unter sonst gleichen Umständen die Scheitelwerte von Amplitude und Intensität. Die Resonanzkurven erhalten deshalb in der Nähe des Maximums einen um so steileren Verlauf, je geringer die Dämpfung ist; bei starker Dämpfung erhält man flache Maxima. Das bedeutet: die Intensität bzw. Amplitude einer erzwungenen Schwingung, deren Frequenz einen gegebenen (übrigens aber beliebigen) Abstand von derjenigen Frequenz hat, welche maximales Mitschwingen erzeugt (Resonanzfrequenz), ist im Verhältnis zur Maximalintensität (bzw. -amplitude) um so kleiner, je geringer die Dämpfung des resonierenden Systems ist. Das ergibt sich auch ohne weiteres aus der Betrachtung der in Figur 11 Seite 95 gezeichneten Resonanzkurven für verschiedene Dämpfungen. Schwach gedämpfte Systeme werden also praktisch nur von solchen Schwingungen erregt, deren Frequenz von der Resonanzfrequenz nur wenig abweicht; sie haben ein schmales Resonanzbereich. Stark gedämpfte Systeme haben ein breites Resonanzbereich, sie werden auch von ferner liegenden Frequenzen noch merklich erregt. Dafür ist bei diesen die absolute Stärke des Mitschwingens an der Resonanzstelle geringer als bei schwach gedämpften.

Sehr anschaulich läßt sich der Einfluß von Verstimmung und Dämpfung darstellen, wenn man die Intensität des Mitschwingens bei konstanter erregender Amplitude A betrachtet. Die Intensität der erzwungenen Schwingung — vgl. Nr. **44** (30) — läßt sich in diesem Falle schreiben:

$$\bar{J} = \frac{MA^2}{2\left[n^2\left(\frac{n}{\varkappa} - \frac{\varkappa}{n}\right)^2 + 4\delta^2\right]}; \tag{34}$$

sie hängt also nicht von dem absoluten Werte der Erregerfrequenz $\varkappa$, sondern nur von dem Verhältnis $\frac{\varkappa}{n}$ der Erregerfrequenz $\varkappa$ zur

1) V. Bjerknes, Wiedemanns Annalen d. Physik u. Chemie **55** (1895), S. 121.

Resonanzfrequenz (hier der Frequenz der ungedämpften Eigenschwingung) ab, und zwar in solcher Form, daß es gleichgültig ist, ob $\varkappa$ in demselben Verhältnis größer oder kleiner als n ist. Dies letztere bedeutet aber akustisch gesprochen, daß es nur auf das musikalische Intervall zwischen erregender Schwingung und (ungedämpfter) Eigenschwingung des Systems ankommt, gleichviel welche von beiden Schwingungen den höheren Ton darstellt. Dividiert man noch durch den entsprechenden Maximalwert der Intensität $\overline{J}_r$ Gl. (33) Nr **44**, so erhält man die relative Intensität des Mitschwingens (bei konstanter erregender Amplitude):

$$\frac{\overline{J}}{\overline{J}_r} = \frac{1}{1 + \frac{n^2}{4\delta^2}\left(\frac{n}{\varkappa} - \frac{\varkappa}{n}\right)^2}. \tag{35}$$

Stellt man den Verlauf graphisch dar mit $\frac{\overline{J}}{\overline{J}_r}$ als Ordinaten und $\frac{\varkappa}{n}$ als Abszissen, so erhält man genau dieselbe Kurve wie $\overline{J}$ in Figur 10; nur liegt das Maximum hier bei der Abszisse 1 und beträgt selbst 1; die Kurve geht aus jener einfach durch proportionale Dehnung bzw. Verkürzung aller Strecken hervor. Sämtliche Frequenzen $\varkappa < n$ drängen sich dabei auf ein verhältnismäßig kleines Stück der Abszissenachse zusammen, während die Werte von $\varkappa$, die größer als n sind, den Rest bis ∞ erfüllen. Zur Vermeidung dieser Unsymmetrie kann man als Abszissen statt der Werte $\frac{\varkappa}{n}$ deren Logarithmen auftragen. Dann rückt die Maximalordinate auf die Abszisse Null, da $\log\frac{\varkappa}{n}$ für $\varkappa = n$ Null wird, und die Kurve läuft zu beiden Seiten derselben symmetrisch, sich asymptotisch der Abszissenachse nähernd, ins Unendliche. Die Symmetrie folgt daraus, daß bekanntlich $\log\frac{n}{\varkappa} = -\log\frac{\varkappa}{n}$ ist und die Ordinaten nach dem früher Gesagten gleichen Wert haben für ein aufsteigendes Intervall $\frac{\varkappa}{n}$, wie für das gleich große absteigende $\frac{n}{\varkappa}$. Einen besonderen Vorteil bietet die logarithmische Darstellung sonst nicht.

Die Abnahme des Mitschwingens bei steigender Verstimmung des resonierenden Systems gegen die Erregerschwingung läßt sich

bei gegebener Dämpfung nach (35) leicht berechnen. Ist die Dämpfung so klein, daß man ohne merklichen Fehler $\frac{2\delta}{\nu}$ statt $\frac{2\delta}{n}$ setzen kann, so wird die Rechnung besonders bequem. Man kann dann den Faktor $\frac{n^2}{4\delta^2}$ im Nenner von (35) näherungsweise mittels Gl. (14) Nr. 33 durch $\frac{\pi^2}{\mathfrak{d}^2}$ ersetzen, und das läßt sich wieder nach Gl. (18) Nr. 34 noch anschaulicher durch die Zahl s der Schwingungen ausdrücken, in welcher die Amplitude auf einen beliebig gewählten Bruchteil $\frac{1}{\varrho}$ herabsinkt. Eine derartige Berechnung ist in Tabelle 12 angegeben. Sie gibt das Intensitätsverhältnis $\frac{\overline{J}}{\overline{J}_r}$ bei Verstimmungen, die immer um je ein Komma (Intervall $\frac{81}{80}$) zunehmen bis zum Intervall $\frac{9}{8}$ des großen Ganztones, für drei verschiedene Dämpfungen, die so gewählt sind, daß nach $s = 10$, bzw. 20, bzw. 50 ganzen Schwingungen die Amplitude der freien Eigenschwingung auf den zehnten Teil herabsinkt, so daß also $\varrho = 10$ ist. Die Intensitäten sind in Prozenten der Resonanzintensität Gl. (33) Nr. 44 angegeben; diese letztere ist also gleich 100 gesetzt. Die logarithmischen Dekremente, sowie das Quadrat der Dämpfungskonstanten δ^2 (dividiert durch Quadrat der Schwingungszahl) sind mit angegeben. Um die absoluten Werte bei verschiedener Dämpfung miteinander vergleichen zu können, sind auch diese mit aufgenommen. Man erhält sie aus den relativen Werten einfach durch Multiplikation mit der zugehörigen Resonanzintensität. Letztere ist für das am wenigsten gedämpfte System gleich 100 angenommen worden; die beiden anderen Werte ergeben sich daraus nach Gl. (33) Nr. 44 zu 16 und 4. Die Figuren 11 und 12 geben ein anschauliches Bild von der verschiedenen Schärfe der Resonanz. Bei der schwächsten Dämpfung des resonierenden Systems wird dasselbe durch eine um einen Ganzton verstimmte Erregerschwingung nur mit 0,4 Prozent der bei Einklang erreichten Intensität erregt, also kaum merklich, bei der stärksten dagegen noch mit 2,4 Prozent. Dafür werden umgekehrt mit wachsender Resonanzbreite (steigender Dämpfung) die absoluten Werte der Maximalintensität kleiner, wie aus Gl. (33) Nr. 44 ohne weiteres ersichtlich ist.

Ganz analoge, aber weniger übersichtliche Resultate erhält

Tabelle 12.

Relative Stärke des Mitschwingens für verschiedene Dämpfungen bei variabler Frequenz und konstanter Amplitude der erregenden Schwingung

Intervall $\frac{\varkappa}{n}$ zwischen erregender Schwingung $\varkappa$ und ungedämpfter Eigenschwingung n (=Resonanzfrequenz $\varkappa_r$) des resonierenden Systems	Amplitude $\mathfrak{A}e^{-\delta t}$ der gedämpften Eigenschwingung ν des resonierenden Systems sinkt auf $\frac{1}{10}$ nach					
	$s=50$ Schwingungen		$s=20$ Schwingungen		$s=10$ Schwingungen	
$\frac{\varkappa}{n}$	$\frac{100\,\bar{J}}{\bar{J}_r}$	$\bar{J}$	$\frac{100\,\bar{J}}{\bar{J}_r}$	$\bar{J}$	$\frac{100\,\bar{J}}{\bar{J}_r}$	$\bar{J}$
Einklang $\frac{80}{80}$	100	100	100	16,00	100	4,00
Synt. Komma $\frac{81}{80}$ u $\frac{80}{81}$	25,82	25,82	68,50	10,96	89,68	3,59
$\frac{82}{80}$ u. $\frac{80}{82}$	8,09	8,09	35,50	5,68	68,75	2,75
$\frac{83}{80}$ u. $\frac{80}{83}$	3,81	3,81	19,84	3,17	49,74	1,99
$\frac{84}{80}$ u. $\frac{80}{84}$	2,20	2,20	12,35	1,98	36,03	1,44
$\frac{85}{80}$ u. $\frac{80}{85}$	1,44	1,44	8,36	1,34	26,72	1,07
$\frac{86}{80}$ u. $\frac{80}{86}$	1,01	1,01	6,02	0,96	20,39	0,82
$\frac{87}{80}$ u. $\frac{80}{87}$	0,76	0,76	4,54	0,71	15,98	0,64
$\frac{88}{80}$ u $\frac{80}{88}$	0,59	0,59	3,55	0,57	12,83	0,51
$\frac{89}{80}$ u. $\frac{80}{89}$	0,47	0,47	2,86	0,46	10,52	0,42
Gr. Ganzton $\frac{90}{80}$ u. $\frac{80}{90}$	0,38	0,38	2,35	0,38	8,78	0,35
natürl. Dekrem. der Ganzperiode $\mathfrak{d}$	0,04605		0,1151		0,2303	
dekad. Dekrem. der Ganzperiode $\bar{\mathfrak{d}}$	0,02		0,05		0,1	
natürl. Dekrem. der Halbperiode Λ	0,02303		0,05756		0,1151	
dekad. Dekrem. der Halbperiode $\bar{\Lambda}$	0,01		0,025		0,05	
$\frac{\delta^2}{n^2}$	0,0000537		0,000336		0,001342	
1	2		3		4	

man für den Verlauf von J und $\frac{J}{J_r}$, wo man nicht die Amplitude, sondern die Intensität (Energie) der erregenden Schwingung bei Variation der Frequenz $\varkappa$ konstant zu halten hat. Sie sind weniger übersichtlich, weil hier mit Änderung der Dämpfung nach (28) Nr. 44 auch die Resonanzfrequenz sich ändert, die dort konstant n beträgt. Bei geringer Dämpfung ist allerdings diese Verschiebung der Maximallage auch nur gering, für die

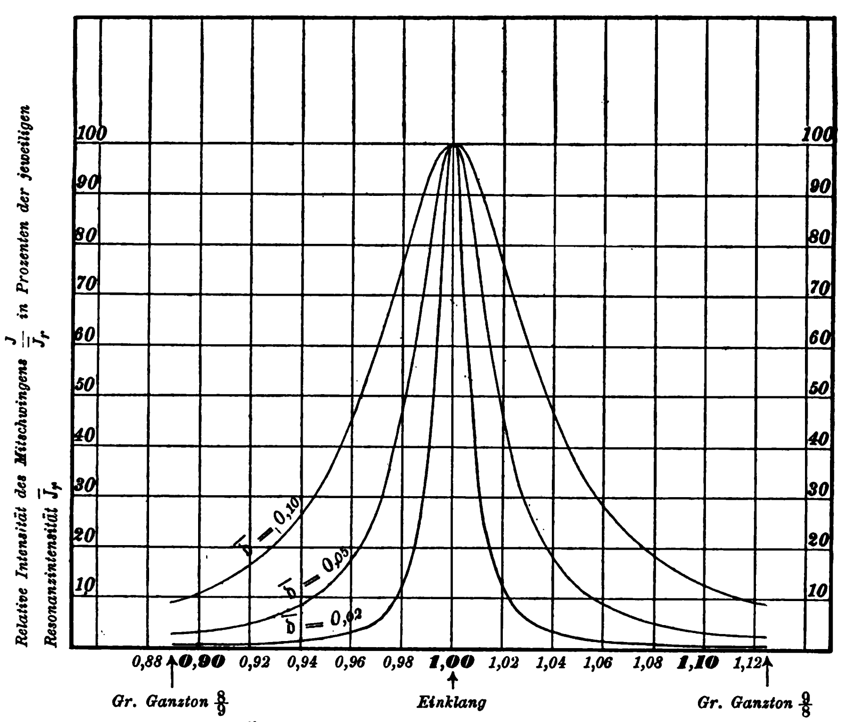


Fig. 11.

Resonanzkurven der Intensität $\overline{J}$ berechnet für konstante Amplitude der ungedämpften erregenden Schwingung bei verschiedener Dämpfung des resonierenden Systems; $\overline{\mathfrak{d}}$ = dekadisches log. Dekrement, $\mathfrak{d} = 2,303\,\overline{\mathfrak{d}}$ = natürl. log. Dekrement der ganzen Periode.

Abszissen: Verstimmungsintervall der erregenden Frequenz $\varkappa$ gegen die Resonanzfrequenz $\varkappa_r$.

Ordinaten: Relative Intensität des Mitschwingens $\overline{J}$ in Prozenten der zugehörigen Resonanzintensität.

Dämpfungen der Tabelle 12 ergibt sie sich aus den mit aufgeführten Werten der relativen Dämpfungsquadrate $\frac{\delta^2}{n^2}$ schon als sehr klein. Es ist nämlich nach Gl. (28) die neue Resonanzlage gegeben durch $\varkappa^2 = n^2 - 2\delta^2$, also wird die relative Veränderung der Resonanzfrequenz $\frac{n - \varkappa}{n}$ nach einigen Umformungen gleich $\frac{\delta^2}{n^2}$, wenn dieser Wert selbst klein gegen 1 ist, was hier zutrifft.

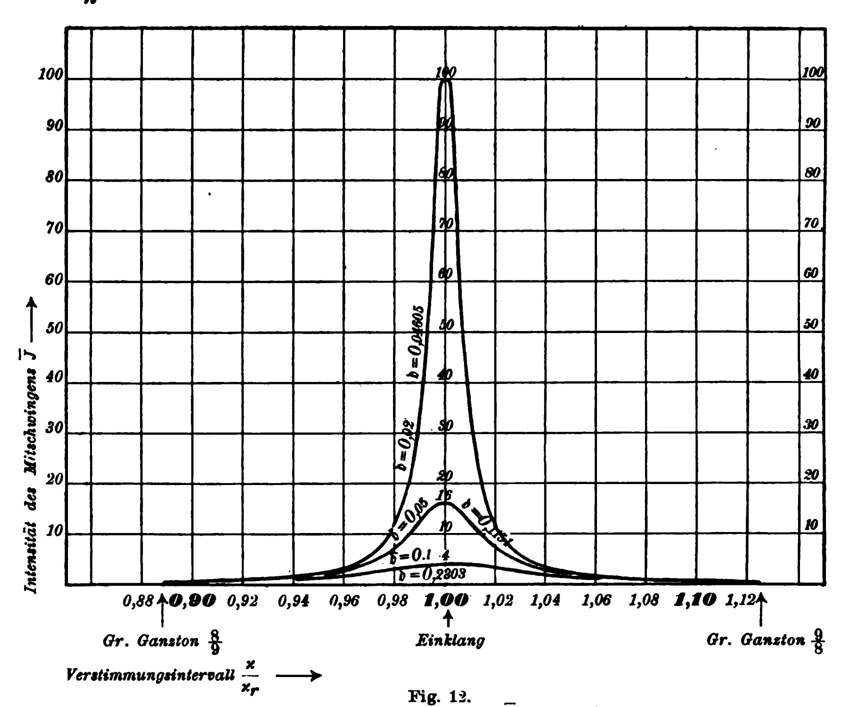


Fig. 12.
Resonanzkurven der Intensität $\bar{J}$ wie in Fig. 11.
Die Ordinaten stellen aber die absolute Intensität des Mitschwingens dar; die Resonanzintensität des am schwächsten gedämpften Systems ($\mathfrak{b} = 0{,}02$) ist gleich 100 gesetzt.

46. Berechnung der Dämpfung und des logarithmischen Dekrementes aus der Resonanzkurve. Aus der Form der Resonanzkurve läßt sich Dämpfung δ und logarithmisches Dekrement $\mathfrak{b}$ des resonierenden Systems berechnen, wenn die erregende

Schwingung ungedämpft sinusförmig ist. Bei gedämpfter Erregung findet man nach dem gleichen Verfahren die Summe der Dekremente von erregender Schwingung und Eigenschwingung des resonierenden Systems, wenn diese Summe klein ist gegen 2π, also nicht extrem starke Dämpfung vorliegt (Bjerknessche Resonanzmethode; vgl. die S. 91 zitierte Arbeit).

Die Resonanzkurve kann in einer der drei Formen von Nr. **44** gegeben sein. Der wichtigste Fall ist der, daß die Intensität der erzwungenen Schwingung bei konstant bleibender Intensität und stetig veränderter Frequenz der erregenden gemessen wird (Fall II von Nr. **44**). Die Lage des Intensitätsmaximums liefert die Resonanzfrequenz $\varkappa_r$. Bestimmt man durch eine besondere Messung noch die Eigenfrequenz des Systems ν, so erhält man bei ungedämpfter Erregung auch ohne weitere Kenntnis der Resonanzkurve aus (28) Nr. **44** Dämpfung δ und natürliches Dekrement $\mathfrak{d}$

$$(36) \qquad \delta = \sqrt{\nu^2 - \varkappa_r^2} \quad \text{und} \quad \mathfrak{d} = \frac{2\pi\delta}{\nu} = 2\pi\sqrt{1 - \frac{\varkappa_r^2}{\nu^2}}.$$

Kann man ν nicht besonders bestimmen, so muß man die Form der Resonanzkurve in der Umgebung der Resonanzstelle kennen, mindestens aber zwei Paar zusammengehörige Werte von Erregerfrequenz $\varkappa$ und erregter Intensität J; am besten ist es, Resonanzintensität J_r (und -frequenz $\varkappa_r$) zu kennen und außerdem zwei beliebige Frequenzen $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$, denen gleiche Intensität J entspricht. Aus (30) und (31) Nr. **44** folgt dann nach einigen einfachen Umformungen

$$(37) \qquad \frac{J_r}{J} = \frac{\left[1 - \frac{\varkappa^2}{\nu^2} - \frac{\mathfrak{d}^2}{4\pi^2}\right]^2 + \frac{\mathfrak{d}^2}{\pi^2}}{\frac{\mathfrak{d}^2}{\pi^2}} = \frac{\pi^2}{\mathfrak{d}^2}\left[\frac{\varkappa_r^2}{\nu^2} - \frac{\varkappa^2}{\nu^2}\right]^2 + 1,$$

wobei $\varkappa$ für $\varkappa_1$ oder $\varkappa_2$ steht.

Also wird:

$$\frac{\pi}{\mathfrak{d}}\left(\frac{\varkappa_r^2}{\nu^2} - \frac{\varkappa^2}{\nu^2}\right) = \pm\sqrt{\frac{J_r}{J} - 1}$$

und schließlich

$$(38) \quad \mathfrak{d} = \pm\,\pi\frac{\varkappa_r^2 - \varkappa^2}{\nu^2}\sqrt{\frac{J}{J_r - J}} = \pm\,\pi\frac{(\varkappa_r + \varkappa)(\varkappa_r - \varkappa)}{\nu^2}\sqrt{\frac{J}{J_r - J}},$$

wobei das + oder — Zeichen zu wählen ist, je nachdem $\varkappa$ kleiner oder größer als $\varkappa_r$ ist, damit $\mathfrak{d}$ positiv wird.

Liegt nun $\varkappa$ nahe an $\varkappa_r$, so kann man mit dem entsprechenden kleinen Fehler $2\varkappa_r$ oder $2\varkappa$ für $\varkappa_r + \varkappa$ setzen; ist ferner die Dämpfung klein, so darf man ebenso mit dem entsprechenden Fehler ν^2 durch $\varkappa_r^2$ oder auch durch $\varkappa^2$ ersetzen. Dadurch fällt ν heraus, und man erhält mit einer gewissen Ungenauigkeit:

$$(39)\qquad \mathfrak{d} = \pm\, 2\pi \frac{\varkappa_r - \varkappa}{\varkappa_r} \sqrt{\frac{J}{J_r - J}} = \pm\, 2\pi \frac{\varkappa_r - \varkappa}{\varkappa} \sqrt{\frac{J}{J_r - J}}\,.$$

Indem man für $\varkappa$ die beiden zum gleichen J gehörigen Frequenzen $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ einsetzt, wo $\varkappa_2 > \varkappa_1$ angenommen ist, erhält man durch Addition und Mittelbildung:

$$(40)\qquad \mathfrak{d} = \pi \frac{\varkappa_2 - \varkappa_1}{\varkappa_r} \sqrt{\frac{J}{J_r - J}} = 2\pi \frac{\varkappa_2 - \varkappa_1}{\varkappa_2 + \varkappa_1} \sqrt{\frac{J}{J_r - J}}\,,$$

wenn noch für $2\varkappa_r$ näherungsweise $\varkappa_2 + \varkappa_1$ gesetzt wird.

Auch im Fall III (Amplitude der erregenden Schwingung konstant) erhält man dieselben Formeln mit gleicher Annäherung, indem man das Produkt $\varkappa\nu$, das statt ν^2 im Nenner von (38) auftritt, durch $\varkappa^2$ oder $\varkappa_r^2$ ersetzt. Unter der Wurzel ist natürlich überall $\bar{J}$ statt J zu setzen. Ebenso führt die Resonanzkurve der Amplitude (Fall I von Nr. 44) auf die gleichen Formeln, nur ist J durch a^2 und J_r durch a_r^2 zu ersetzen.

Beispiel: Die mittlere Kurve der Figur 11 S. 95 liefert für die Ordinate 50 die Werte $\varkappa_1 = 0{,}9816\, \varkappa_r$ und $\varkappa_2 = 1{,}0184\, \varkappa_r$. Daraus folgt nach (40) das Dekrement $\mathfrak{d} = 0{,}0368\,\pi = 0{,}1156$ statt 0,1151. Die Quadratwurzel in den Formeln wird hier gleich 1, weil die gewählte Ordinate die Hälfte der Resonanzordinate ist. Für andere Verhältnisse $\frac{J}{J_r}$ gibt Zenneck[1] eine Tabelle, aus der die Werte $2\pi\sqrt{\frac{J}{J_r - J}}$ zu entnehmen sind.

Dieselben Formeln gelten nach Bjerknes bei gedämpfter Erregung mit gleicher Annäherung für die Summe $\mathfrak{d}_1 + \mathfrak{d}_2$ des Dekrementes der erregenden und der Eigenschwingung, wenn $\mathfrak{d}_1 + \mathfrak{d}_2$ klein ist gegen 2π; es ist dabei links in (38) bis (40) einfach diese Summe statt $\mathfrak{d}$ zu setzen.

---

1) J. Zenneck, Leitfaden der drahtlosen Telegraphie (Stuttgart 1909), Tabelle XI im Anhang.

7. Kapitel.

Systeme mit mehreren Freiheitsgraden und gekoppelte Schwingungen.

47. Allgemeine Eigenschaften der Systeme mit mehreren Freiheitsgraden. Die bisherigen Betrachtungen bezogen sich alle auf den abstrakten Fall eines Massenpunktes, der einen Freiheitsgrad der Bewegung besitzt, sich also z. B. nur längs einer gegebenen Kurve x bewegen kann. Im speziellsten und einfachsten Fall ist diese Kurve eine Gerade. Als Eigenschwingung (natürliche Schwingung) kommt dem Punkt eine einzige zu, deren Form durch seine Masse und den Ausdruck der rücktreibenden Kraft in Verbindung mit der Dämpfung bestimmt ist. Der Massenpunkt kann auch durch ein anderes System ersetzt werden. Z. B. ist ein starrer Körper, der sich nur um eine feste Achse drehen kann, auch ein System mit einem Freiheitsgrad; seine Schwingungsfähigkeit ist ebenfalls eine einfache. Angestoßen und dann sich selbst überlassen führen solche Systeme eine bestimmte und nur diese Schwingungsbewegung aus. Beispiel: das physische Pendel.

Anders ist es bei Systemen, die mehrere Freiheitsgrade besitzen. Einfache Beispiele für solche mit zwei Freiheitsgraden sind ein Massenpunkt, der sich auf einer Fläche bewegen muß (Bewegungsfähigkeit in zwei aufeinander senkrechten Koordinatenrichtungen), oder zwei miteinander durch Anziehungs- bzw. Abstoßungskräfte verbundene Punkte, von denen jeder einzelne sich nur längs einer Kurve bewegen kann, oder zwei starre, durch einen tordierten Faden miteinander verbundene Körper, die nur um diesen Faden als Achse rotieren können, und ähnliche. Drei Freiheitsgrade hat ein frei im Raum beweglicher Massenpunkt, ein aus drei Punkten bestehendes System, die auf je eine Kurve beschränkt sind, usw.

Analogien, speziell akustische, aus dem Gebiet der elastischen Körper bilden für den Fall eines Freiheitsgrades die Stimmgabel mit dem gewöhnlichen rechteckigen Querschnitt der Zinken, bei welcher Schwingungen senkrecht zur Zinkenebene normalerweise praktisch nicht vorkommen; für den Fall zweier Freiheitsgrade der gerade Stab mit rechteckigem Querschnitt, bei dem Biegungsschwingungen in den zwei aufeinander senkrechten Achsen des Querschnitts möglich sind; für drei Freiheitsgrade derselbe

Stab, wenn man auch die Longitudinalschwingungen mit berücksichtigt, die bisher ganz außer acht gelassen wurden.

Damit Schwingungen stattfinden können, müssen die wirkenden Kräfte so beschaffen sein, daß sie die Massenpunkte bzw. Massenteilchen nach bestimmten Ruhelagen hintreiben. Befinden sich die Teile des Systems in diesen ihren Ruhe- oder Gleichgewichtslagen, so wirken auch keine Kräfte auf sie. Werden die Teilchen irgendwie aus ihren Ruhelagen entfernt und das System sich dann selbst überlassen, so vollführen sie Schwingungen, nun aber nicht mehr von einer einzigen eindeutig bestimmten Form, sondern von einer Mannigfaltigkeit, die dem Freiheitsgrad entspricht. Ist die Schwingung eines Systems mit einem Freiheitsgrad eine einfache Sinusschwingung bestimmter Periode, so ist hier die Schwingung jedes Teilchens eine Übereinanderlagerung von Sinusschwingungen verschiedener Perioden, bildet also, akustisch gesprochen, einen zusammengesetzten Klang, dessen Komponenten durch die Eigenschaften der anderen Teile des Systems mitbestimmt werden.

Die Teile des Systems sind nicht mehr unabhängige Schwingungssysteme für sich, sondern miteinander verkoppelt. Man kommt also auf diesem Wege über die Theorie der Systeme mit mehreren Freiheitsgraden zu der wichtigen Theorie der gekoppelten Systeme. Den einfachsten, alle Besonderheiten typisch darstellenden Fall bildet das aus zwei Einzelsystemen von je einem Freiheitsgrad zusammengesetzte gekoppelte System, das in Nr. 51 ff. behandelt wird.

48. Energie und Bewegungsgleichungen der Systeme mit mehreren Freiheitsgraden. Die Bewegung eines mechanischen Systems ist vollständig bestimmt, wenn man zu allen Zeiten die Lage und Geschwindigkeit seiner sämtlichen Teile kennt. Bei einem aus einzelnen getrennten Massenpunkten bestehenden System wird die Lage durch die Koordinaten der Punkte, und die Geschwindigkeit durch deren Differentialquotienten nach der Zeit bestimmt. Sind μ Punkte vorhanden, so hat man 3μ Raumkoordinaten irgendwelcher Art (Cartesische Punktkoordinaten, Polarkoordinaten, Kugel-, Zylinder-, elliptische Koordinaten usw.) und 3μ Geschwindigkeitskomponenten. Die 3μ Koordinaten sind aber im allgemeinen nicht alle unabhängig, d. h. ihrem Werte nach ganz beliebig wählbar; ein Teil ist auf Grund der speziellen Natur des Systems durch die Werte der übrigen,

die beliebig angenommen werden können, schon mitbestimmt. Die Anzahl der übrigbleibenden unabhängigen Koordinaten gibt den Freiheitsgrad des Systems an.

Beispielsweise ist bei einem Punkt, der sich nur auf einer gegebenen Fläche bewegen kann, die dritte Raumkoordinate jedesmal durch die beiden anderen mittels der Gleichung der Fläche bestimmt, so daß nur zwei Koordinaten frei gewählt werden können, also nur zwei Freiheitsgrade vorhanden sind. Ein Beispiel dafür ist das sphärische Pendel. Ein anderes Beispiel für Beschränkung des Freiheitsgrades bilden zwei durch eine unausdehnbare Stange von verschwindend kleiner Masse starr miteinander verbundene Massenpunkte. Die Lage des einen Punktes ist ganz frei wählbar (drei unabhängige Koordinaten); der andere muß sich dann aber stets auf einer um jenen ersten Punkt geschlagenen Kugelfläche befinden, deren Radius durch die Länge der Verbindungsstange gegeben ist, so daß statt drei nur noch zwei willkürlich wählbare Koordinaten (etwa Azimut und Zenit- bzw. Poldistanz) zu den vorhandenen drei hinzukommen.

Wie die Systeme im einzelnen beschaffen sind und wie etwaige Beschränkungen des Freiheitsgrades bewirkt werden, ist für das folgende gleichgültig.

Bewegen sich die Teile des Systems, so sind die Koordinaten und die Geschwindigkeiten Funktionen der Zeit und ihrer zu irgendeinem Zeitpunkt (etwa Anfangspunkt der Zeit) willkürlich wählbaren eigenen Werte (Anfangswerte der Koordinaten und Geschwindigkeiten, die in den Anfangsbedingungen des jeweiligen Problems angegeben werden). Sind diese Funktionen bekannt, gleichviel auf welche Weise sie gefunden sind, so ist damit der Zustand des Systems zu allen Zeiten bekannt. Als Koordinaten brauchen nicht immer Strecken zu dienen wie bei den Cartesischen Punktkoordinaten, es können bekanntlich auch andere Größen (Winkel usw.) in Betracht kommen. Auch brauchen die Koordinatenachsen sich nicht unter rechten Winkeln zu schneiden (orthogonale Koordinaten), sondern können ganz beliebige Winkel bilden. Die in dieser Weise verallgemeinerten Koordinaten sollen mit $p_1, p_2, p_3, \ldots,$ ihre Differentialquotienten nach der Zeit $\frac{dp_1}{dt}, \frac{dp_2}{dt}$ usw. mit $\dot{p}_1, \dot{p}_2, \ldots$ bezeichnet werden.

Die Gleichungen, durch welche die Koordinaten als Funktionen der Zeit (und der Anfangswerte) dargestellt werden, erhält

man im allgemeinen erst durch Integration aus den Differentialgleichungen der Bewegung. Diese letzteren, die wir für Systeme mit einem Freiheitsgrad ohne weiteres hinschreiben konnten, haben auch hier die allgemeine Form: Masse mal Beschleunigung des Teilchens ist gleich der Summe sämtlicher in der Beschleunigungsrichtung wirkenden Kräfte. Nur liegen die Verhältnisse hier insofern anders, als die Richtung der Beschleunigung nicht schon fest gegeben ist und die inneren Kräfte — von den äußeren oder eingeprägten ganz abgesehen — nicht bloß von der Lage und Geschwindigkeit des betreffenden Massenpunktes, sondern auch von denen der anderen Punkte abhängen. Sie sind daher meist nicht ohne weiteres angebbar.

Auf Grund bekannter, zuerst von Lagrange abgeleiteter Sätze der Mechanik kann man die Bewegungsgleichungen jedoch hinschreiben, wenn die kinetische Energie U und die potentielle Energie V des Systems als Funktion der Koordinaten und Geschwindigkeiten bekannt sind (sogenannte verallgemeinerte Bewegungsgleichungen von Lagrange). Wenn außerdem Reibungskräfte wirken, die von den Geschwindigkeiten abhängen, so muß auch die von Lord Rayleigh[1]) eingeführte „Zerstreuungsfunktion“ (Dissipationsfunktion) F als Funktion der p und $\dot{p}$ gegeben sein, deren doppelter Betrag $2F$ angibt, welche Energiemenge während der Bewegung in der Zeiteinheit in nichtmechanische Formen (Wärme) umgewandelt (zerstreut) wird.

49. Kinetische Energie U, potentielle Energie V und Zerstreuungsfunktion F als Funktionen der Koordinaten p und Geschwindigkeiten $\dot{p}$. Die kinetische Energie U ist ganz allgemein eine homogene quadratische Funktion der Geschwindigkeiten, also der Größen $\dot{p} = \frac{dp}{dt}$. Glieder erster Ordnung in $\dot{p}$ kommen also nicht vor, wohl aber können außer den rein quadratischen Gliedern auch solche mit Produkten zweier Geschwindigkeiten $\dot{p}_1 \dot{p}_2$ usw. vorkommen. Das ist z. B. immer der Fall, wenn die Koordinaten nicht orthogonal sind. Ein einfaches Beispiel liefert die Bewegung eines Punktes mit der Masse M in der Ebene. Bei orthogonalen Cartesischen Koordinaten x, y ist die kinetische Energie

$$U = \frac{M}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{M}{2}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2. \tag{1}$$

1) Lord Rayleigh, Theory of Sound I § 81.

Bei Benutzung schiefwinkliger Cartesischer Koordinaten, deren positive ξ- und η-Achsen den Winkel ω miteinander einschließen, wird

$$(2) \qquad U = \frac{M}{2}\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 + \frac{M}{2}\left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2 + M\cos\omega\frac{d\xi}{dt}\frac{d\eta}{dt},$$

wie sich ohne weiteres aus der Figur 13 ergibt, da für die Strecke ds die Gleichungen gelten:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$
$$= d\xi^2 + d\eta^2 + 2\cos\omega\, d\xi\, d\eta.$$

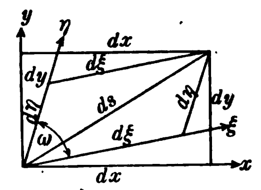


Fig. 13.
Bogenelement ds einer ebenen Kurve, ausgedrückt in orthogonalen und in schiefwinkligen Cartesischen Koordinaten x, y bzw. ξ, η.

Die Koeffizienten in dem Ausdruck für U sind im allgemeinen Funktionen der Koordinaten und natürlich der Masse des Punktes, der sie einfach proportional sind. In besonderen Fällen, wie dem obigen, können sie sich auch auf Konstante reduzieren.

Die potentielle Energie V kann eine beliebige Funktion der Koordinaten p sein. Ihre negative partielle Ableitung nach einer Koordinatenrichtung, z. B. $-\frac{\partial V}{\partial p_1}$, ergibt die in dieser Richtung wirkende Kraft, welche das ganze System auf den Punkt ausübt, zu dem die Koordinate gehört. Sind im besonderen die Kräfte lineare Funktionen der Koordinaten, was bei hinreichend kleinen Verschiebungen der Teile immer näherungsweise erfüllt ist, so ist V eine homogene quadratische Funktion der Koordinaten. Auch hier treten natürlich im allgemeinen außer den Quadraten auch Produkte, diesmal je zweier Koordinaten auf.

Für reibungslose mechanische Systeme oder allgemeiner gesprochen für Systeme, in denen keine dissipativen, energiezerstreuenden Kräfte tätig sind, genügt die Kenntnis dieser beiden Größen und der äußeren (eingeprägten) Kräfte zur Aufstellung der Differentialgleichungen der Bewegung. Im anderen Falle muß noch der Betrag der Energiezerstreuung pro Zeiteinheit bekannt sein. Dieser läßt sich nach Lord Rayleigh durch die Zerstreuungsfunktion F darstellen — er ist gleich $2F$ —, wenn die dissipativen Kräfte den Geschwindigkeiten $\dot{p}$ proportional sind, wobei es keinen wesentlichen Unterschied macht, ob die absoluten Geschwindigkeiten gegen ein festes Koordinatensystem oder die relativen der Teile gegeneinander benutzt werden. Die Zerstreuungs-

funktion F wird in diesem Falle, wie die kinetische Energie U, eine homogene quadratische Funktion der Geschwindigkeiten, und ihre negative partielle Ableitung nach irgendeiner Geschwindigkeitskomponente $\dot{p}$ gibt die in der Richtung dieser Geschwindigkeit entgegenwirkende dissipative Kraft, speziell Reibungskraft, an.

50. Bewegungsgleichungen, wenn U, F, V homogene quadratische Funktionen der Koordinaten bzw. Geschwindigkeiten sind. Die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen[1]) erhält man aus U, V, F und den äußeren Kräften $P_1, P_2, \ldots$ für jede der Koordinaten p in folgender Form:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{p}_1}\right) - \frac{\partial U}{\partial p_1} + \frac{\partial F}{\partial \dot{p}_1} + \frac{\partial V}{\partial p_1} = P_1 \tag{3}$$

und so viel entsprechende mit anderem Index, wie es unabhängige Koordinaten gibt.

Die Zerstreuungsfunktion, kinetische und potentielle Energie F, U, V lassen sich nach der hier gemachten Voraussetzung in folgender Weise ausdrücken:

$$\tag{4}\left\{\begin{aligned} U &= \frac{a_{11}}{2}\dot{p}_1^2 + \frac{a_{22}}{2}\dot{p}_2^2 + \cdots + a_{12}\dot{p}_1\dot{p}_2 + a_{13}\dot{p}_1\dot{p}_3 + \cdots + a_{23}\dot{p}_2\dot{p}_3 + \cdots \\ F &= \frac{b_{11}}{2}\dot{p}_1^2 + \frac{b_{22}}{2}\dot{p}_2^2 + \cdots + b_{12}\dot{p}_1\dot{p}_2 + b_{13}\dot{p}_1\dot{p}_3 + \cdots + b_{23}\dot{p}_2\dot{p}_3 + \cdots \\ V &= \frac{c_{11}}{2}p_1^2 + \frac{c_{22}}{2}p_2^2 + \cdots + c_{12}p_1p_2 + c_{13}p_1p_3 + \cdots + c_{23}p_2p_3 + \cdots. \end{aligned}\right.$$

Die Koeffizienten a und b sind im allgemeinen Funktionen der Koordinaten p, reduzieren sich aber in speziellen Fällen auf konstante Werte, die Koeffizienten c sind konstant. Dabei sei noch einmal bemerkt: U hat von selbst diese quadratische Form, F muß sie haben, wenn die dissipativen Kräfte in den Bewegungsgleichungen den Geschwindigkeiten proportional sein sollen, V dagegen ist dieser Beschränkung nicht unterworfen und hat diese Form nur, wenn die inneren Kräfte linear von den Koordinaten abhängen.

Die Bewegungsgleichungen werden also bei Geltung der Gleichungen (4):

---

1) Vgl. Lehrbücher der analytischen Mechanik; z. B. A. Gray, Lehrbuch d. Physik, Bd. I, § 240 ff. (deutsche Ausg. von F. Auerbach).

$$(5)\quad \begin{cases} \frac{d}{dt}(a_{11}\dot{p}_1 + a_{12}\dot{p}_2 + \cdots) - \frac{\dot{p}_1^2}{2}\frac{\partial a_{11}}{\partial p_1} - \frac{\dot{p}_2^2}{2}\frac{\partial a_{22}}{\partial p_1} - \cdots \\ - \dot{p}_1\dot{p}_2\frac{\partial a_{12}}{\partial p_1} - \dot{p}_1\dot{p}_3\frac{\partial a_{13}}{\partial p_1} - \cdots + b_{11}\dot{p}_1 + b_{12}\dot{p}_2 + \cdots \\ \qquad + c_{11}p_1 + c_{12}p_2 + \cdots = P_1, \end{cases}$$

und die entsprechenden mit anderem Index.

Für die Akustik kommen hauptsächlich Schwingungen von kleiner Amplitude um stabile Gleichgewichtslagen in Betracht. In diesem Falle sind bei genügender Kleinheit der Amplituden in erster Annäherung die Koeffizienten a, b, c als konstant anzusehen und die Bewegungsgleichungen vereinfachen sich wesentlich; sie werden:

$$(6)\quad \begin{cases} a_{11}\frac{d^2p_1}{dt^2} + a_{12}\frac{d^2p_2}{dt^2} + \cdots + b_{11}\frac{dp_1}{dt} + b_{12}\frac{dp_2}{dt} + \cdots \\ \qquad + c_{11}p_1 + c_{12}p_2 + \cdots = P_1, \\ a_{21}\frac{d^2p_1}{dt^2} + a_{22}\frac{d^2p_2}{dt^2} + \cdots + b_{21}\frac{dp_1}{dt} + b_{22}\frac{dp_2}{dt} + \cdots \\ \qquad + c_{21}p_1 + c_{22}p_2 + \cdots = P_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Hier sind die Koeffizientenindizes so geschrieben, daß die folgende Gleichung einfach durch zyklische Vertauschung aus der vorhergehenden entsteht. Es gelten dabei die Beziehungen:

$$(7)\qquad a_{ik} = a_{ki}, \quad b_{ik} = b_{ki}, \quad c_{ik} = c_{ki},$$

wobei i und k beliebige positive ganze Zahlen sind. Noch allgemeiner wird das Gleichungssystem (6), wenn die Bedingungen (7) nicht gelten. Dann lassen sich aber die Größen U, V, F nicht in der einfachen Form von Gl. (4) ausdrücken.

51. Koppelung und Normalkoordinaten. In der Form (6) bilden die Gleichungen die Grundlage für die von M. Wien[1]) entwickelte Theorie der gekoppelten Schwingungen. Der einfachste Fall ist der eines Systems von zwei Freiheitsgraden, das man sich also bestehend denken kann aus zwei Teilsystemen mit je einem Freiheitsgrad. Die beiden in Nr. 50 (6) hingeschriebenen Gleichungen mit Weglassung der durch Punkte angedeuteten weiteren Glieder sind dabei das ganze zu lösende System von

1) M. Wien, Wiedem. Ann. d. Physik u. Chemie 61 (1897), 151.

Differentialgleichungen. Sind die äußeren Kräfte P_1, P_2 Null, so erhält man daraus die Eigenschwingungen des Systems.

Ein Vergleich der einzelnen Gleichungen (6) mit der im 5. und 6. Kapitel (vgl. z. B. Gl. (12) Nr. 38) behandelten Gleichung eines gedämpften Systems mit einem Freiheitsgrad zeigt, daß sie aus dieser einfach durch Hinzufügung von Gliedern hervorgehen, welche auch von den anderen Koordinaten abhängen. Wien bezeichnet dieselben als Koppelungsglieder. Es sind hier diejenigen Glieder, deren Koeffizienten einen Doppelindex mit zwei verschiedenen Zahlen haben, wie 12, 13, 21 usw. Die Koppelung bewirkt, daß die Bewegungen nach den einzelnen Koordinatenrichtungen nicht mehr voneinander unabhängig sind. Eine Bewegung des Systems in irgendeiner Koordinatenrichtung hat im allgemeinen Bewegungen auch in den anderen Koordinatenrichtungen zur Folge. Die Energie der ersten Bewegung geht dabei zum Teil auf die anderen über. Nur für gewisse, jedesmal durch die spezielle Natur des Systems bestimmte Koordinaten, die Normalkoordinaten genannt werden, wird dies anders, indem für Bewegungen in diesen Richtungen die Koppelung ganz oder wenigstens teilweise wegfällt. Die einzelnen Bewegungen sind im ersten Falle ganz unabhängig voneinander; es sind, wenn es sich um Schwingungen handelt, die Partialschwingungen des Systems, die — abgesehen von etwaiger Dämpfung — dauernd unverändert bestehen.

Die Theorie ist ohne weiteres auf elektromagnetische Schwingungen übertragbar, wobei die verallgemeinerten Koordinaten $p_1, p_2, \ldots$ entweder elektrische Stromstärke oder Elektrizitätsmenge oder Spannung in den gekoppelten Schwingungskreisen 1, 2, 3, ... darstellen können und die Koeffizienten a, b, c mit den Induktionskoeffizienten, Ohmschen Widerständen und elektrischen Kapazitäten zusammenhängen bzw. mit ihnen identisch sind.

Die Normalkoordinaten haben ihre Bedeutung in erster Linie für den idealen Fall fehlender Reibung, also $F = 0$. Dann lassen sich nämlich durch Einführung geeigneter neuer Koordinaten, eben der Normalkoordinaten ψ, gleichzeitig die beiden Ausdrücke U und V in Nr. 50 (4) so umformen, daß sie nur quadratische Glieder und keine Produkte verschiedener Koordinaten bzw. Geschwindigkeiten enthalten. (Dabei ist immer vorausgesetzt, daß die Koeffizienten a und c bzw. auch b in diesen Ausdrücken Konstante sind.) Es wird also:

$$(8)\qquad \begin{cases} U = \frac{a_1}{2}\left(\frac{d\psi_1}{dt}\right)^2 + \frac{a_2}{2}\left(\frac{d\psi_2}{dt}\right)^2 + \cdots, \\ V = \frac{c_1}{2}\psi_1^2 + \frac{c_2}{2}\psi_2^2 + \cdots, \\ F = 0. \end{cases}$$

Die resultierenden Bewegungsgleichungen enthalten offenbar keine Koppelungsglieder, sie sind einfach so viel unabhängige Bewegungsgleichungen von Systemen mit einem Freiheitsgrad, als es Koordinaten gibt. Ihre Lösungen sind, wenn keine äußeren Kräfte Ψ wirken, ungedämpfte Sinusschwingungen der einzelnen Normalkoordinaten, welche die möglichen freien Partialschwingungen des Systems darstellen:

$$(9)\qquad \Psi_1 = A_1 \sin(n_1 t + \Theta_1), \quad \Psi_2 = A_2 \sin(n_2 t + \Theta_2), \ldots,$$

wobei gemäß Nr. 24 $n_1^2 = \frac{c_1}{a_1}$, $n_2^2 = \frac{c_2}{a_2}$, ... ist.

Ein System von μ Freiheitsgraden besitzt also μ verschiedene Eigenschwingungen oder — akustisch gesprochen — μ verschiedene Eigentöne. Wenn äußere Kräfte Ψ wirken, so erhält man die entsprechenden erzwungenen Schwingungen.

Auch bei vorhandener Reibung kann es vorkommen, daß für die Normalkoordinaten überhaupt keine Koppelung auftritt, nämlich dann, wenn durch Einführung derselben gleichzeitig auch die Zerstreuungsfunktion F sich so umformt, daß sie nur quadratische Glieder besitzt. Die freien Partialschwingungen sind dann gedämpfte Sinusschwingungen mit den Dämpfungen

$$\delta_1 = \frac{b_1}{2a_1}, \quad \delta_2 = \frac{b_2}{2a_2}, \quad \ldots.$$

Im allgemeinen fallen aber die Produkte nicht weg, und es bleibt dann die Reibungskoppelung auch für die Normalkoordinaten bestehen.

Statt U und V kann man natürlich auch U und F oder F und V durch Einführung neuer Koordinaten auf die einfache Form mit bloß quadratischen Gliedern reduzieren, was nach der Theorie der quadratischen Formen bei konstanten Koeffizienten a, b, c immer möglich ist. Dann bleibt im allgemeinen die dritte Größe unreduziert und liefert die entsprechenden Koppelungsglieder. Doch entsteht dadurch nichts prinzipiell Neues.

52. System von zwei Freiheitsgraden. Arten der Koppelung. Koppelungskoeffizienten. Wesen und Wirkungsweise der Koppelung ergibt sich am besten aus der Durchrechnung eines einfachen Spezialfalles. Als solchen nehmen wir den von Wien[1]) behandelten Fall der freien Schwingungen eines Systems von zwei Freiheitsgraden. Die Differentialgleichungen (6) Nr. 50 lauten mit anderer Anordnung der Glieder und Bezeichnung der Variablen durch x_1 und x_2:

$$(10)\begin{cases} a_{11}\dfrac{d^2x_1}{dt^2} + b_{11}\dfrac{dx_1}{dt} + c_{11}x_1 + a_{12}\dfrac{d^2x_2}{dt^2} + b_{12}\dfrac{dx_2}{dt} + c_{12}x_2 = 0, \\ a_{22}\dfrac{d^2x_2}{dt^2} + b_{22}\dfrac{dx_2}{dt} + c_{22}x_2 + a_{21}\dfrac{d^2x_1}{dt^2} + b_{21}\dfrac{dx_1}{dt} + c_{21}x_1 = 0. \end{cases}$$

Dividiert man sie durch a_{11} bzw. a_{22}, so gehen sie über in:

$$(10a)\begin{cases} \dfrac{d^2x_1}{dt^2} + 2\delta_1\dfrac{dx_1}{dt} + n_1^2x_1 + \varrho_1\dfrac{d^2x_2}{dt^2} + 2\delta_1\sigma_1\dfrac{dx_2}{dt} + n_1^2\vartheta_1x_2 = 0, \\ \dfrac{d^2x_2}{dt^2} + 2\delta_2\dfrac{dx_2}{dt} + n_2^2x_2 + \varrho_2\dfrac{d^2x_1}{dt^2} + 2\delta_2\sigma_2\dfrac{dx_1}{dt} + n_2^2\vartheta_2x_1 = 0, \end{cases}$$

wobei gesetzt ist:

$$(11)\begin{cases} \dfrac{a_{12}}{a_{11}} = \varrho_1, \quad \dfrac{a_{21}}{a_{22}} = \varrho_2, \\ \dfrac{b_{11}}{a_{11}} = 2\delta_1, \quad \dfrac{b_{22}}{a_{22}} = 2\delta_2, \quad \dfrac{b_{12}}{a_{11}} = 2\delta_1\sigma_1, \quad \dfrac{b_{21}}{a_{22}} = 2\delta_2\sigma_2, \\ \dfrac{c_{11}}{a_{11}} = n_1^2, \quad \dfrac{c_{22}}{a_{22}} = n_2^2, \quad \dfrac{c_{12}}{a_{11}} = n_1^2\vartheta_1, \quad \dfrac{c_{21}}{a_{22}} = n_2^2\vartheta_2. \end{cases}$$

Die Größen ϱ, σ, ϑ (letzteres bei Wien mit τ bezeichnet) sind reine Zahlenkoeffizienten, wie aus dieser Definition hervorgeht. Wien hat sie „Koppelungskoeffizienten" genannt und zwar in der angegebenen Reihenfolge Koeffizienten der Beschleunigungs-, Reibungs- und Kraftkoppelung. Neuerdings wird jedoch bei derartigen Systemen (insbesondere bei zwei gekoppelten elektrischen Schwingungskreisen), wenn es sich, wie es meist der Fall ist, nur um eine Art der Koppelung handelt, gewöhnlich die Quadratwurzel aus dem Produkt der beiden zusammengehörigen Koeffizienten, z. B. $\sqrt{\varrho_1\varrho_2}$ oder $\sqrt{\vartheta_1\vartheta_2}$ als „Koppelungskoeffizient" bezeichnet.

---

1) M. Wien, Wiedemanns Annalen der Physik und Chemie 61 (1897), 151.

Durch Elimination der einen Variablen, etwa x_2, erhält man aus dem System der beiden simultanen Differentialgleichungen (10) eine lineare Differentialgleichung vierter Ordnung:

$$a\frac{d^4x}{dt^4} + b\frac{d^3x}{dt^3} + c\frac{d^2x}{dt^2} + d\frac{dx}{dt} + ex = 0. \tag{12}$$

Das kann man z. B. so erreichen. Wir bezeichnen die erste der beiden Gleichungen (10) mit I, die zweite mit II. Zunächst wird das Glied $\frac{d^2x_2}{dt^2}$ aus beiden eliminiert, wodurch eine neue Gleichung III entsteht, die x_2 nur in den Verbindungen $\frac{dx_2}{dt}$ und $\dot{x}_2$ enthält. Diese wird nach t differentiiert, so daß sie $\frac{d^2x_2}{dt_2}$ und $\frac{dx_2}{dt}$, aber kein x_2 enthält, und in dieser neuen Form (IIIa) wieder mit II so kombiniert, daß die Glieder mit $\frac{d^2x_2}{dt^2}$ verschwinden und eine neue Gleichung IV entsteht, die nun wie III x_2 nur in $\frac{dx_2}{dt}$ und x_2, x_1 aber auch als $\frac{d^3x_1}{dt^3}$ enthält. Diese Gleichung IV wird nun mit III kombiniert, so daß $\frac{dx_2}{dt}$ verschwindet und eine Gleichung V entsteht, welche außer x_2 nur Glieder mit x_1 und dessen Differentialquotienten, und zwar als höchsten derselben $\frac{d^3x_1}{dt^3}$ enthält. Nach t differentiiert liefert dieselbe $\frac{dx_2}{dt}$, ausgedrückt durch x_1 und dessen Differentialquotienten, wobei $\frac{d^4x_1}{dt^4}$ als höchster Differentialquotient auftritt. Diese beiden Werte von x_2 und $\frac{dx_2}{dt}$ in III eingesetzt, führen zu der gesuchten linearen Differentialgleichung vierter Ordnung für x_1. Genau die entsprechende Gleichung mit vertauschten Indizes erhält man für x_2. Wenn einzelne Koppelungsglieder fehlen, vereinfacht sich die Rechnung, und man erhält besondere, einfachere Fälle der Gl. (12).

Nach dem früher, Nr. 51, Gesagten würde man prinzipiell mit einem solchen einfacheren Fall auskommen, da man bei der angenommenen Form der Bewegungsgleichungen durch Einführung von „Normalkoordinaten“ zwei Koppelungsarten beseitigen kann.

Es muß aber hervorgehoben werden, daß dies nur bei Geltung der Gleichungen (7) Nr. **50** zutrifft, also in dem Falle, wo U, V, F sich durch Gl. (4) Nr. **50** darstellen lassen. Indes ist es zuweilen erwünscht, die andere Koordinatenart statt der Normalkoordinaten beizubehalten, auch wenn die Reduktion möglich ist. Die einzelnen Spezialfälle sind von Wien in der schon zitierten sowie einer späteren Arbeit[1]) und von Drude[2]) durchgerechnet worden, in den beiden letzteren für elektromagnetische Schwingungssysteme.

53. Natürliche oder Eigenschwingungen eines gekoppelten Systems von zwei Freiheitsgraden. Nach der Theorie der linearen Differentialgleichungen lassen sich partikuläre Integrale für sie stets mit Hilfe der Exponentialfunktion finden; das allgemeine Integral muß so viel willkürliche Konstanten haben, als die Ordnung der Gleichung beträgt, im vorliegenden Falle also vier. Der Ansatz

$$x' = Ae^{\mu t}$$

für ein solches partikuläres Integral liefert, wenn man diesen Wert in die Differentialgleichung Nr. **52** (12) einsetzt, eine Bestimmungsgleichung vom vierten Grade für μ. Daraus ergeben sich also vier (im allgemeinen) verschiedene Werte μ und somit vier verschiedene partikuläre Integrale, aus denen man das allgemeine Integral erhält, indem man sie mit je einer willkürlichen Konstante multipliziert und addiert:

$$x = Ae^{\mu_1 t} + Be^{\mu_2 t} + Ce^{\mu_3 t} + De^{\mu_4 t}. \tag{13}$$

Die vier Wurzeln der biquadratischen Gleichung für μ haben die Form:

$$\left.\begin{matrix}\mu_1\\ \mu_2\end{matrix}\right\} = -\delta_1' \pm i\nu_1' \quad \text{und} \quad \left.\begin{matrix}\mu_3\\ \mu_4\end{matrix}\right\} = -\delta_2' \pm i\nu_2', \tag{14}$$

wobei $i = \sqrt{-1}$ ist. Es wird sich sofort zeigen, daß, entsprechend den Bezeichnungen bei Systemen mit einem Freiheitsgrad, die δ' Dämpfungskonstanten, die ν' (Kreis-)Frequenzen der Eigenschwingungen des gekoppelten Systems sind. Falls die Größen ν_1' und ν_2' imaginär ausfallen, die Werte μ also alle reell werden, erhält man keine Schwingungen, sondern aperiodische Bewegungen. In jedem Falle müssen die reellen Teile der μ negativ sein, damit

1) M. Wien, Annalen d. Physik **8** (1902), 686.
2) P. Drude, ebenda **13** (1904), 512.

die Amplituden mit der Zeit abnehmen, was übrigens infolge der Natur der vorliegenden Differentialgleichungen immer erfüllt ist. Wir beschränken uns auf reelle Werte der Frequenzen ν', also auf Schwingungen.

Mit Benutzung der Moivreschen Formeln $e^{\pm i\omega} = \cos\omega \pm i \sin\omega$ kann man die einzelnen Glieder $e^{\mu t}$ zerlegen und dadurch das ganze Integral in einen reellen und einen imaginären Teil spalten, von denen jeder für sich — der imaginäre unter Weglassung des Faktors i — ein Integral in anderer Form darstellt. Man erhält aus (13):

$$
\begin{aligned}
(15) \quad x = {} & A e^{-\delta_1' t} \cos\nu_1' t + B e^{-\delta_1' t} \cos\nu_1' t + C e^{-\delta_2' t} \cos\nu_2' t \\
& + D e^{-\delta_2' t} \cos\nu_2' t \\
& + i[A e^{-\delta_1' t} \sin\nu_1' t - B e^{-\delta_1' t} \sin\nu_1' t + C e^{-\delta_2' t} \sin\nu_2' t \\
& - D e^{-\delta_2' t} \sin\nu_2' t] \\
= {} & (A + B) e^{-\delta_1' t} \cos\nu_1' t + (C + D) e^{-\delta_2' t} \cos\nu_2' t \\
& + i[(A - B) e^{-\delta_1' t} \sin\nu_1' t + (C - D) e^{-\delta_2' t} \sin\nu_2' t].
\end{aligned}
$$

Indem man die beiden neuen reellen Integrale, deren willkürliche Konstanten jetzt $A + B$, $A - B$, $C + D$, $C - D$ sind, additiv zum allgemeinen reellen Integral vereinigt, ergibt sich einfach der zuletzt hingeschriebene Ausdruck ohne den Faktor i im zweiten Teil. Das so entstandene Integral läßt sich auf bekannte Weise umformen in:

$$
(16) \quad x = A' e^{-\delta_1' t} \sin(\nu_1' t + \varphi) + B' e^{-\delta_2' t} \sin(\nu_2' t + \psi).
$$

Hier sind die Amplituden A', B' und die Phasenkonstanten φ, ψ willkürlich und durch die Anfangsbedingungen des Problems zu bestimmen. Ist die so gefundene Variable das x_1 des Gleichungssystems (10) Nr. 52, so ergibt sich daraus x_2 mit Hilfe einer der vorher erwähnten Gleichungen, die bei der Elimination von x_2 benutzt wurden. Dabei kommen offenbar keine neuen willkürlichen Konstanten mehr hinein, so daß die Lösung des Problems, wie es sein muß, im ganzen vier willkürliche Konstanten enthält. Man kann die Lösung symmetrisch schreiben, wobei sie scheinbar acht Integrationskonstanten enthält, nämlich:

$$
(17) \quad \begin{cases}
x_1 = A_1 e^{-\delta_1' t} \sin(\nu_1' t + \varphi_1) + B_1 e^{-\delta_2' t} \sin(\nu_2' t + \psi_1), \\
x_2 = A_2 e^{-\delta_1' t} \sin(\nu_1' t + \varphi_2) + B_2 e^{-\delta_2' t} \sin(\nu_2' t + \psi_2).
\end{cases}
$$

Von den Konstanten sind jedoch nur vier, etwa A_1, B_1, φ_1, ψ_1 willkürlich, während die Verhältnisse $\frac{A_1}{A_2}$, $\frac{B_1}{B_2}$, $\frac{\varphi_1}{\varphi_2}$, $\frac{\psi_1}{\psi_2}$ durch die Koeffizienten der Differentialgleichungen, d. h. durch die Konstanten des schwingenden Systems festgelegt sind.

Das wesentliche Ergebnis dieser Übersichtsrechnung ist also: In einem gekoppelten System, das aus zwei Teilsystemen mit je einem Freiheitsgrad besteht, führt jedes derselben für sich Schwingungen aus, die durch Übereinanderlagerung zweier Sinusschwingungen mit (im allgemeinen) verschiedenen, aber für beide Systeme gemeinschaftlichen Dämpfungen und Schwingungszahlen gebildet werden. Zur Verdeutlichung dienen die folgenden Spezialfälle.

54. Eigenschwingung zweier ungedämpfter gekoppelter Systeme. Ist nur „Kraftkoppelung" (entsprechend der elektrischen oder Kapazitätskoppelung bei elektromagnetischen Systemen) vorhanden, so lauten die Bewegungsgleichungen:

$$(18)\qquad \frac{d^2x_1}{dt^2} + n_1^2 x_1 + n_1^2 \vartheta_1 x_2 = 0, \quad \frac{d^2x_2}{dt^2} + n_2^2 x_2 + n_2^2 \vartheta_2 x_1 = 0.$$

Durch Elimination eines der x erhält man die für beide x gültige Differentialgleichung:

$$(19)\qquad \frac{d^4x}{dt^4} + (n_1^2 + n_2^2)\frac{d^2x}{dt^2} + n_1^2 n_2^2 (1 - \vartheta_1 \vartheta_2) x = 0.$$

Durch den Ansatz $x = e^{\mu} = e^{in}$ erhält man die charakteristische Gleichung:

$$(20)\qquad \mu^4 + \mu^2 (n_1^2 + n_2^2) + n_1^2 n_2^2 (1 - \vartheta_1 \vartheta_2) = 0,$$

also:

$$(in')^2 = \mu^2 = -\tfrac{1}{2}\left(n_1^2 + n_2^2 \pm \sqrt{(n_1^2 + n_2^2)^2 - 4 n_1^2 n_2^2 (1 - \vartheta_1 \vartheta_2)}\right).$$

Dieser Wert ist, da die Koeffizienten ϑ_1 und ϑ_2, wie sich zeigen wird, immer kleiner als 1 sind, stets negativ; μ wird also rein imaginär, und man erhält demnach Sinusschwingungen mit den beiden Schwingungszahlen:

$$(21)\qquad \left.\begin{matrix} n_1' \\ n_2' \end{matrix}\right\} = +\sqrt{\frac{n_1^2 + n_2^2 \pm \sqrt{(n_1^2 - n_2^2)^2 + 4 n_1^2 n_2^2 \vartheta_1 \vartheta_2}}{2}}$$

Hieraus ergibt sich sofort x_1, und wenn man den Wert dafür in die erste der beiden Differentialgleichungen (18) einsetzt, auch x_2:

$$(22)\quad \begin{cases} x_1 = A\sin(n_1't+\varphi) + B\sin(n_2't+\psi) \\ x_2 = A'\sin(n_1't+\varphi) + B'\sin(n_2't+\psi), \end{cases}$$

wobei A und B die beiden willkürlichen Amplitudenkonstanten, φ und ψ die willkürlichen Phasenkonstanten sind; die Amplituden A' und B' hängen mit A und B zusammen durch die Gleichungen:

$$(23)\qquad A' = \frac{A(n_1'^2 - n_1^2)}{n_1^2\vartheta_1} \quad \text{und} \quad B' = \frac{B(n_2'^2 - n_1^2)}{n_1^2\vartheta_1}.$$

Ordnet man die Vorzeichen in (21) so zu, daß für verschwindende Koppelung, d. h. $\vartheta_1 = \vartheta_2 = 0$, n_1' in n_1 und n_2' in n_2 übergeht, so kann man A' und B' schreiben:

$$(23\text{a})\quad \begin{cases} A' = \dfrac{-(n_1^2 - n_2^2) + \sqrt{(n_1^2 - n_2^2)^2 + 4n_1^2n_2^2\vartheta_1\vartheta_2}}{2n_1^2\vartheta_1}A \\ B' = \dfrac{-(n_1^2 - n_2^2) - \sqrt{(n_1^2 - n_2^2)^2 + 4n_1^2n_2^2\vartheta_1\vartheta_2}}{2n_1^2\vartheta_1}B \end{cases}$$

oder auch in der von Wien benutzten Form:

$$(23\text{b})\quad \begin{cases} A' = \dfrac{2n_2^2\vartheta_2 A}{n_1^2 - n_2^2 + \sqrt{(n_1^2 - n_2^2)^2 + 4n_1^2n_2^2\vartheta_1\vartheta_2}} \\ B' = \dfrac{2n_2^2\vartheta_2 B}{n_1^2 - n_2^2 - \sqrt{(n_1^2 - n_2^2)^2 + 4n_1^2n_2^2\vartheta_1\vartheta_2}}. \end{cases}$$

Hier sieht man, wie die Schwingung jedes Teilsystems sich aus zwei Sinusschwingungen verschiedener Periode zusammensetzt. Die Verhältnisse werden noch deutlicher, wenn man weiter spezialisiert.

I. Differenz der Schwingungszahlen verhältnismäßig groß, derart, daß $n_1^2 - n_2^2$ groß ist gegen $4n_1^2n_2^2\vartheta_1\vartheta_2$. Man kann dann die Quadratwurzel in den Ausdrücken für $n_1'^2$ und $n_2'^2$ entwickeln und erhält:

$$(24)\quad \begin{cases} n_1'^2 = n_1^2 + \dfrac{n_1^2n_2^2\vartheta_1\vartheta_2}{n_1^2 - n_2^2}; \qquad n_2'^2 = n_2^2 - \dfrac{n_1^2n_2^2\vartheta_1\vartheta_2}{n_1^2 - n_2^2}, \\ \text{also:} \\ n_1' = n_1\left(1 + \dfrac{n_2^2\vartheta_1\vartheta_2}{2(n_1^2 - n_2^2)}\right); \quad n_2' = n_2\left(1 - \dfrac{n_1^2\vartheta_1\vartheta_2}{2(n_1^2 - n_2^2)}\right). \end{cases}$$

Bei Zuordnung des + Zeichens in (21) zu n_1', des — Zeichens zu n_2' gilt $n_1' > n_2'$ und nach dem vorher Gesagten auch $n_1^2 > n_2^2$.

Also sagen die Gleichungen (24) aus: die natürliche Schwingungszahl des höheren Tones n_1 der ungekoppelten Systeme wird durch die Koppelung vergrößert zu n_1', der Ton also erhöht; die des tieferen Tones n_2 wird verkleinert zu n_2', der betreffende Ton also vertieft. Die Aufeinanderfolge der Schwingungszahlen ist daher durch Figur 14 gegeben.

Man kann die Übereinanderlagerung beider Schwingungen in jedem der Teilsysteme nach Wien folgendermaßen auffassen: jedes System führt freie Schwingungen nach seiner (durch die Koppelung etwas geänderten) Eigenperiode und zugleich erzwungene Schwingungen der (ebenfalls etwas geänderten) Eigenperiode des andern Systems aus. Für die Amplituden ergibt sich das Größenverhältnis so, daß diejenige Schwingung bevorzugt ist, deren Frequenz der Eigenfrequenz

$0 \quad n_2' \quad n_2 \qquad\qquad n_1 \quad n_1' \quad \to \infty$

Fig. 14. Aufeinanderfolge der Schwingungszahlen n_1, n_2 der freien und n_1', n_2' der gekoppelten Systeme.

des ungekoppelten Systems näher liegt. Hier würde dies für System 1 die A-Schwingung (Frequenz n_1'), für System 2 die B-Schwingung (Frequenz n_2') sein.

II. Differenz der natürlichen Schwingungszahlen $n_1 - n_2$ gleich Null (Resonanzfall). Auch hier ergeben sich zwei verschiedene Frequenzen n_1' und n_2', die eine größer, die andere kleiner als die natürliche Schwingungszahl $n_1 = n_2 = n$ der freien Systeme. Es wird nämlich:

$$(25)\begin{cases} n_1'^2 = n^2\left(1+\sqrt{\vartheta_1\vartheta_2}\right), \qquad n_2'^2 = n^2\left(1-\sqrt{\vartheta_1\vartheta_2}\right), \\ \text{also} \\ n_1' = n\sqrt{1+\sqrt{\vartheta_1\vartheta_2}} = n\sqrt{1+\vartheta}, \quad n_2' = n\sqrt{1-\sqrt{\vartheta_1\vartheta_2}} = n\sqrt{1-\vartheta}, \end{cases}$$

wobei

$$(25\text{a}) \qquad \vartheta = \sqrt{\vartheta_1\vartheta_2}$$

der Koppelungskoeffizient in der neueren Bedeutung ist. Also:

$$(26)\begin{cases} x_1 = A\sin\left(nt\sqrt{1+\vartheta}+\varphi\right) + B\sin\left(nt\sqrt{1-\vartheta}+\psi\right), \\ x_2 = A\sqrt{\frac{\vartheta_2}{\vartheta_1}}\sin\left(nt\sqrt{1+\vartheta}+\varphi\right) - B\sqrt{\frac{\vartheta_2}{\vartheta_1}}\sin\left(nt\sqrt{1-\vartheta}+\psi\right). \end{cases}$$

Die Koppelung zweier von Natur gleichgestimmter freier Systeme macht also eine genaue Abstimmung des

Ganzen auf einen einzigen Ton überhaupt unmöglich. Bei loser Koppelung wird allerdings der Unterschied der gekoppelten Frequenzen so gering, daß sie praktisch als eine einzige erscheinen, akustisch also als ein Ton.

Die Amplitude der A-Schwingung (n_1') im System 1 verhält sich hier zur Amplitude derselben Schwingung im System 2 wie $\sqrt{\vartheta_1} : \sqrt{\vartheta_2}$, und dasselbe gilt für die B-Schwingung. In Verbindung mit den Definitionsgleichungen der Koppelungskoeffizienten ϑ_1 und ϑ_2 Nr. **52** (11) ergibt dies, daß die Amplituden sich umgekehrt wie die Quadratwurzeln aus den Massen der Systeme verhalten. Daher ist die mittlere Energie der A-Schwingung in beiden Systemen die gleiche, und ebenso die der B-Schwingung. Die Energie verteilt sich also im Mittel gleichmäßig über das ganze System. Dabei kann sie jedoch, wie sich sogleich zeigen wird, zeitweise ganz oder überwiegend in dem einen Teilsystem enthalten sein, d. h. sie pendelt zwischen beiden Systemen hin und her.

55. Schwebungen. Pendeln der Energie zwischen den Teilsystemen. Durch die Übereinanderlagerung der A- und B-Schwingung entstehen in jedem System Schwebungen, die um so langsamer werden, je weniger die beiden Frequenzen voneinander abweichen, je kleiner also der „Koppelungskoeffizient“ $\vartheta = \sqrt{\vartheta_1 \vartheta_2}$ ist. Sie sind daher bei fester Koppelung schneller als bei loser. Die Schwebungen finden in beiden Systemen mit gleicher Schnelligkeit statt (Frequenz derselben $\omega' = n_1' - n_2'$), sind aber wegen der verschiedenen Vorzeichen der einzelnen Schwingungsglieder Nr. **54** (26) in der Phase um 180^0 gegeneinander verschoben. Die Amplitude, und mit ihr die Energie, hat deshalb in dem einen System ihr Maximum, wenn sie im anderen ihr Minimum besitzt. Damit tritt das vorher erwähnte Hin- und Herpendeln der Energie zwischen den Systemen ein. Graphisch ist das Verhalten in Figur 15 dargestellt.

Soll bei den Schwebungen einige Zeit in jedem System nahezu völlige Ruhe herrschen, die Amplitude der resultierenden Schwingung also Null oder wenigstens sehr klein sein, so muß $A = B$ sein, d. h. die beiden Teilschwingungen müssen gleiche Amplituden haben.

Ausgeprägte Schwebungen erfolgen somit nur bei loser Koppelung, also wenn $\vartheta = \sqrt{\vartheta_1 \vartheta_2}$ klein ist gegen 1, und wenn gleich-

zeitig A und B nicht sehr verschieden sind. Dann ist aber näherungsweise:

$$n_1' = n\left(1 + \frac{\vartheta}{2}\right), \quad n_2' = n\left(1 - \frac{\vartheta}{2}\right),$$

und die Gleichungen (26) für x_1 und x_2 gehen für den Fall $A = B$ über in:

$$(27)\begin{cases} \frac{x_1}{A} = \sin\left[nt\left(1+\frac{\vartheta}{2}\right)+\varphi\right] + \sin\left[nt\left(1-\frac{\vartheta}{2}\right)+\psi\right] \\ \quad = 2\cos\left(\frac{nt\vartheta}{2}+\frac{\varphi-\psi}{2}\right)\sin\left(nt+\frac{\varphi+\psi}{2}\right), \\ \frac{x_2}{A}\sqrt{\frac{\vartheta_1}{\vartheta_2}} = \sin\left[nt\left(1+\frac{\vartheta}{2}\right)+\varphi\right] - \sin\left[nt\left(1-\frac{\vartheta}{2}\right)+\psi\right] \\ \quad = 2\sin\left(\frac{nt\vartheta}{2}+\frac{\varphi-\psi}{2}\right)\cos\left(nt+\frac{\varphi+\psi}{2}\right). \end{cases}$$

Dies sind Sinusschwingungen der Frequenz n mit zeitlich variabler Amplitude. Die Frequenz der Amplitudenschwankung ist $\frac{n\vartheta}{2}$, sie ist also bei der bezüglich ϑ gemachten Annahme klein gegen n. Es ist leicht zu erkennen, daß die Amplitude von x_1 ihr Maximum hat, wenn die von $x_2 = 0$ ist und umgekehrt, womit das Hin-

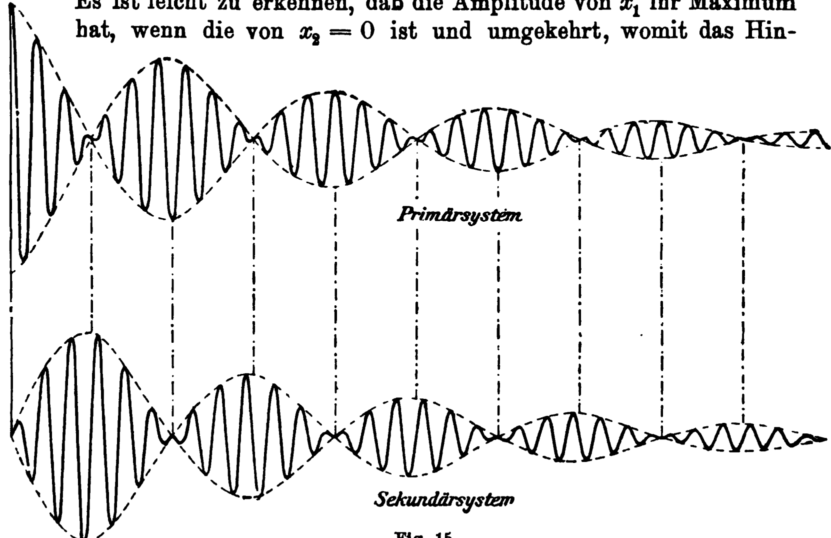


Fig. 15.
Schwebungen der Intensität (und Amplitude) im Primär- und Sekundärsystem eines gekoppelten Systems infolge Hin- und Herpendelns der Energie zwischen beiden.

und Herpendeln der Energie sich bestätigt. Die Amplitude kann nur dann genau gleich Null werden, wenn $A = B$ ist. Umgekehrt folgt: wenn zu irgendeiner Zeit die Amplitude der resultierenden Schwingung eines der Systeme Null ist, so muß $A = B$ sein, d. h. die Amplituden der beiden Teilschwingungen mit den Frequenzen n_1' und n_2' müssen einander gleich sein. Die Amplitudenminima sind dann bei den Schwebungen in beiden Systemen sämtlich Null. Dieser Fall tritt z. B. ein, wenn zu Anfang ein System in Ruhe ist und das andere von außen erregt wird. Das erste System wird dann von diesem allmählich auch zum Schwingen gebracht, nimmt dabei nach und nach die ganze Energie des anderen auf, gibt sie dann wieder ab, und so geht das Spiel weiter

56. Eigenschwingungen zweier gedämpfter gekoppelter Systeme. Spezialfall gleicher Dämpfung, $\delta_1 = \delta_2 = \delta$. Die Behandlung der übrigen Koppelungsarten ergibt nichts wesentlich anderes als die Kraftkoppelung. Dagegen ist das Verhalten der D ä m p f u n g ein neues, in der Natur sogar sehr wesentliches Moment. Wir nehmen auch hier wieder Kraftkoppelung an. Die Differentialgleichungen der Bewegung sind dann:

$$(28)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2x_1}{dt^2} + 2\delta_1\dfrac{dx_1}{dt} + n_1^2x_1 + n_1^2\vartheta_1x_2 = 0, \\ \dfrac{d^2x_2}{dt^2} + 2\delta_2\dfrac{dx_2}{dt} + n_2^2x_2 + n_2^2\vartheta_2x_1 = 0. \end{cases}$$

Aus ihnen ergibt sich die lineare Differentialgleichung für jedes der x:

$$(29)\qquad \frac{d^4x}{dt^4} + 2(\delta_1+\delta_2)\frac{d^3x}{dt^3} + (n_1^2+n_2^2+4\delta_1\delta_2)\frac{d^2x}{dt^2}$$
$$+ 2(\delta_2n_1^2+\delta_1n_2^2)\frac{dx}{dt} + n_1^2n_2^2(1-\vartheta_1\vartheta_2)x = 0,$$

und mit dem Ansatz $x = e^{\mu}$ als partikulärem Integral die Bestimmungsgleichung (Charakteristik) für μ:

$$(30)\qquad \mu^4 + 2(\delta_1+\delta_2)\mu^3 + (n_1^2+n_2^2+4\delta_1\delta_2)\mu^2$$
$$+ 2(\delta_2n_1^2+\delta_1n_2^2)\mu + n_1^2n_2^2(1-\vartheta_1\vartheta_2) = 0.$$

Die ziemlich umständliche Lösung derselben, deren Herleitung W i e n ausführlich mitteilt, läßt sich, mit Vernachlässigung von kleinen Gliedern höherer Ordnung, in einfacher Form für den Fall hinschreiben, daß Dämpfung und Koppelung mäßig groß und die

Differenz der Schwingungszahlen klein gegen die Schwingungszahlen selbst ist, daß also nur die Umgebung der Resonanz betrachtet wird. Wenn δ, $\vartheta\nu$ und $\nu_1 - \nu_2$ so klein sind, daß ihre dritten und höheren Potenzen neben ν^3 und höheren Potenzen von ν vernachlässigt werden können, so gilt:

$$(31)\quad \begin{cases} \left.\begin{matrix}\mu_1\\ \mu_2\end{matrix}\right\} = \pm i(Q+R) - \left(\frac{\delta_1+\delta_2}{2} + S\right) = -\delta_1' \pm i\nu_1', \\ \left.\begin{matrix}\mu_3\\ \mu_4\end{matrix}\right\} = \pm i(Q-R) - \left(\frac{\delta_1+\delta_2}{2} - S\right) = -\delta_2' \pm i\nu_2', \end{cases}$$

wobei

$$(32)\quad \begin{cases} Q = \sqrt{\frac{a}{2} - \frac{a^2-4c}{8a}}, \quad \left.\begin{matrix}R\\ S\end{matrix}\right\} = \sqrt{\frac{\sqrt{(a^2-4c)^2+8ab^2} \pm (a^2-4c)}{16a}}, \\ a = \nu_1^2 + \nu_2^2 + \frac{(\delta_1-\delta_2)^2}{2}, \qquad b = -(\delta_1-\delta_2)(\nu_1^2-\nu_2^2), \\ a^2 - 4c = (\nu_1^2-\nu_2^2)^2 - 2(\delta_1-\delta_2)^2(\nu_1^2+\nu_2^2) + 4\vartheta_1\vartheta_2\nu_1^2\nu_2^2. \end{cases}$$

Die Größen

$$\nu_1^2 = n_1^2 - \delta_1^2, \quad \nu_2^2 = n_2^2 - \delta_2^2$$

sind die natürlichen Schwingungszahlen der ungekoppelten gedämpften Teilsysteme.

Wir betrachten wieder spezielle Fälle.

I. Dämpfung in beiden Systemen gleich, $\delta_1 = \delta_2 = \delta$. Es wird:

$$b = 0, \quad S = 0, \quad a = \nu_1^2 + \nu_2^2,$$

$$a^2 - 4c = (\nu_1^2 - \nu_2^2)^2 + 4\vartheta_1\vartheta_2\nu_1^2\nu_2^2,$$

$$R = \sqrt{\frac{2(a^2-4c)}{16a}} = \sqrt{\frac{(\nu_1^2-\nu_2^2)^2 + 4\vartheta_1\vartheta_2\nu_1^2\nu_2^2}{8(\nu_1^2+\nu_2^2)}}$$

und näherungsweise:

$$Q = \sqrt{\frac{\nu_1^2+\nu_2^2}{2}}\left(1 - \frac{(\nu_1^2-\nu_2^2)^2 + 4\vartheta_1\vartheta_2\nu_1^2\nu_2^2}{8(\nu_1^2+\nu_2^2)^2}\right),$$

wenn man den zunächst erhaltenen Wurzelausdruck in eine Reihe entwickelt und diese mit dem zweiten Gliede abbricht, was voraussetzt, daß dieses Glied bereits so klein ist gegen 1, daß seine höheren Potenzen vernachlässigt werden dürfen.

Man erhält also zwei verschiedene Frequenzen

$$(33)\qquad \nu_1' = Q + R, \quad \nu_2' = Q - R,$$

die durch die gemeinsame Näherungsgleichung bestimmt sind:

$$\left.\begin{matrix}\nu_1'^2\\ \nu_2'^2\end{matrix}\right\} = \frac{\nu_1^2+\nu_2^2}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\nu_1^2-\nu_2^2)^2+4\vartheta_1\vartheta_2\nu_1^2\nu_2^2}. \tag{34}$$

Ist hierin $\nu_1^2-\nu_2^2$ groß gegen das Koppelungsglied $2\nu_1\nu_2\sqrt{\vartheta_1\vartheta_2}$, so ergibt dies durch Reihenentwicklung:

$$\left\{\begin{array}{l}\nu_1'^2 = \nu_1^2 + \dfrac{\vartheta_1\vartheta_2\nu_1^2\nu_2^2}{(\nu_1^2-\nu_2^2)}; \quad \nu_2'^2 = \nu_2^2 - \dfrac{\vartheta_1\vartheta_2\nu_1^2\nu_2^2}{(\nu_1^2-\nu_2^2)}\\ \text{und}\\ \nu_1' = \nu_1 + \dfrac{\vartheta_1\vartheta_2\nu_1\nu_2^2}{2(\nu_1^2-\nu_2^2)}; \quad \nu_2' = \nu_2 - \dfrac{\vartheta_1\vartheta_2\nu_1^2\nu_2}{2(\nu_1^2-\nu_2^2)}.\end{array}\right. \tag{35}$$

Das Ergebnis ist also demjenigen bei ungedämpften Schwingungen ganz analog. Wichtiger ist der in der folgenden Nummer behandelte Fall.

57. Gekoppelte Eigenschwingungen bei verschiedener Dämpfung, aber gleicher Frequenz der freien Systeme (Resonanzfall). Wir setzen hier also

II. die Dämpfung der beiden freien Systeme δ_1 und δ_2 verschieden, ihre Frequenzen ν_1 und ν_2 aber gleich. Beide Systeme sollen also vor der Koppelung aufeinander abgestimmt sein. Akustische Beispiele liefern die schwach gedämpften Stimmgabeln, welche mit stark gedämpften Resonanzkästen gekoppelt sind. Für den hier vorliegenden Spezialfall der Resonanz gilt:

$$\nu_1 = \nu_2 = \nu, \tag{36}$$

und es wird:

$$\left\{\begin{array}{l} a = 2\nu^2 + \dfrac{(\delta_1-\delta_2)^2}{2},\ b = 0,\ a^2 - 4c = -4(\delta_1-\delta_2)^2\nu^2 + 4\vartheta_1\vartheta_2\nu^4,\\ Q = \sqrt{\dfrac{a}{2} - \dfrac{a^2-4c}{8a}} = \sqrt{\nu^2 + \dfrac{(\delta_1-\delta_2)^2}{4} - \dfrac{-4\nu^2(\delta_1-\delta_2)^2 + 4\vartheta_1\vartheta_2\nu^4}{16\nu^2+4(\delta_1-\delta_2)^2}},\\ R = \sqrt{\dfrac{a^2-4c}{8a}} = \sqrt{\dfrac{-4\nu^2(\delta_1-\delta_2)^2 + 4\vartheta_1\vartheta_2\nu^4}{16\nu^2+4(\delta_1-\delta_2)^2}},\\ S = 0.\end{array}\right.$$

Nimmt man nun an, was bei akustischen Schwingungen immer zutreffen wird, daß die Differenz der Dämpfungen der freien Systeme $\delta_1 - \delta_2$ klein ist gegen die gemeinsame Frequenz ν, so

kann näherungsweise $(\delta_1 - \delta_2)^2$ gegen ν^2 vernachlässigt werden und die Werte von Q und R werden einfacher:

$$(37) \quad Q = \nu\sqrt{1 - \frac{\vartheta_1\vartheta_2}{4}}, \quad R = \sqrt{\frac{\vartheta_1\vartheta_2\nu^2 - (\delta_1 - \delta_2)^2}{4}}.$$

In den meisten Fällen ist schon jede der Dämpfungen δ_1 und δ_2 für sich klein gegen ν, denn selbst bei stark gedämpften kubischen Luftresonatoren (Resonanzkästen) beträgt das (natürliche) logarithmische Dekrement $\mathfrak{d}$ nach Versuchen von Leiberg[1]) etwa 0,03 bis 0,3, woraus sich — vgl. Nr. **33** (14) — für $\frac{\delta}{\nu} = \frac{\mathfrak{d}}{2\pi}$ ungefähr 0,005 bis 0,05 ergibt. Für Stimmgabeln ist nach den schon in Nr. **34** mitgeteilten Werten von Hartmann-Kempf im Mittel $\mathfrak{d}' = 0{,}002$, also das natürliche Dekrement $\mathfrak{d} = 0{,}00461$, so daß $\frac{\delta}{\nu}$ ungefähr 0,0007 wird.

Es kommt nun weiter darauf an, ob die Koppelung oder die Dämpfung überwiegt.

Ist 1. die Koppelung vorherrschend, derart, daß

$$(38) \qquad \vartheta_1\vartheta_2\nu^2 > (\delta_1 - \delta_2)^2$$

ist, so wird R ebenso wie Q reell, man erhält also nach Nr. **35** (31) zwei verschiedene Frequenzen

$$(39) \qquad \nu_1' = Q + R, \quad \nu_2' = Q - R,$$

wo Q und R die Werte (37) haben, aber für beide Schwingungen ein und dieselbe Dämpfung

$$(40) \qquad \delta' = \frac{\delta_1 + \delta_2}{2}.$$

Ist 2. die Dämpfung gleich der Koppelung, also

$$(41) \qquad \vartheta_1\vartheta_2\nu^2 = (\delta_1 - \delta_2)^2,$$

so wird $R = 0$, und man erhält in diesem Übergangsfall (bei Resonanz) nur eine Frequenz und eine Dämpfung

$$(42) \qquad \nu' = Q = \nu\sqrt{1 - \frac{\vartheta_1\vartheta_2}{4}}, \quad \delta' = \frac{\delta_1 + \delta_2}{2},$$

---

1) P. Leiberg, Journ. d. russ. physik.-chem. Gesellsch. (physik. Abt.) **27** (1896), 93. Referat in den Beiblättern zu den Annalen d. Physik u. Chemie **20** (1896), 961.

also eine einheitliche Schwingung des ganzen Systems. Der Zustand ist jedoch labil, geringe Änderungen der äußeren Umstände führen sofort zu dem ersten oder dem jetzt zu behandelnden dritten Falle.

Ist 3. die Dämpfung vorherrschend, also:

$$\vartheta_1 \vartheta_2 \nu^2 < (\delta_1 - \delta_2)^2, \tag{43}$$

so wird R imaginär, liefert also in Nr. 56 (31) einen Beitrag zur Dämpfungskonstante; man erhält demnach zwei Schwingungen mit gleicher Frequenz

$$\nu' = Q = \nu \sqrt{1 - \frac{\vartheta_1 \vartheta_2}{4}}, \tag{44}$$

aber mit zwei verschiedenen Dämpfungen

$$\left.\begin{matrix}\delta_1' \\ \delta_2'\end{matrix}\right\} = \frac{\delta_1 + \delta_2}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\delta_1 - \delta_2)^2 - \vartheta_1 \vartheta_2 \nu^2}, \tag{45}$$

wofür man bei starkem Überwiegen der Dämpfung, d. h. wenn $\nu \sqrt{\vartheta_1 \vartheta_2}$ klein ist gegen $\delta_1 - \delta_2$, näherungsweise schreiben kann:

$$\delta_1' = \delta_1 - \frac{\vartheta_1 \vartheta_2 \nu^2}{4(\delta_1 - \delta_2)}, \qquad \delta_2' = \delta_2 + \frac{\vartheta_1 \vartheta_2 \nu^2}{4(\delta_1 - \delta_2)}. \tag{45a}$$

Das bedeutet: die Dämpfung der stärker gedämpften Koppelungsschwingung ist kleiner als die des stärker gedämpften der beiden freien Systeme, die Dämpfung der schwächer gedämpften Koppelungsschwingung ist größer als die des schwächer gedämpften freien Systems.

Die beiden Teilsysteme werden also hinsichtlich ihrer Dämpfung durch die Koppelung einander genähert, während bezüglich der Schwingungszahlen nach Nr. 54 das Umgekehrte gilt; die resultierenden Schwingungszahlen liegen weiter auseinander als die der freien Systeme. Das gilt, wie die weitere Untersuchung zeigt, ganz allgemein und nicht nur für den hier behandelten Fall zweier aufeinander abgestimmter Systeme, so daß man sagen kann:

Die Koppelung zweier freien Systeme bewirkt Auseinanderrücken der Schwingungszahlen ν und Zusammenrücken der Dämpfungskonstanten δ.

58. Frequenz und Dämpfung der gekoppelten Systeme bei beliebigem Unterschied ε der freien Eigenfrequenzen ν_1 und ν_2. Wie der Verlauf der Erscheinung ist, wenn die

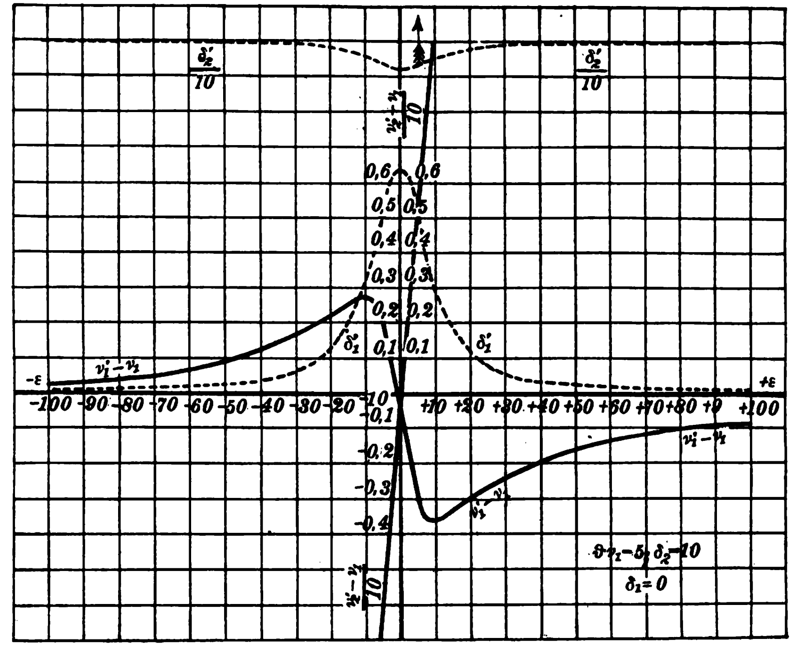


Fig. 16.

I. Dämpfung vorherrschend, $\delta_2 - \delta_1 > \vartheta\nu_1$.

Abszissen: Verstimmung (Schwingungszahlendifferenz) $\varepsilon = \nu_2 - \nu_1$ der freien Systeme.
Ordinaten: Frequenzkurven ——— (linke Zahlenreihe), Dämpfungskurven - - - - (rechte Zahlenreihe).

Fig. 19.

Abszissen: Verstimmung $\varepsilon = \nu_2 - \nu_1$ der freien Systeme.
Ordinaten: Frequenzkurven $\nu_1' - \nu_1$ der schwächer gedämpften Schwingung für die drei Fälle der Figuren 16—18, auf gleichen Maßstab übertragen.

Fig. 18.
III. Koppelung vorherrschend, $\delta_2 - \delta_1 < \vartheta \nu_1$.
Abszissen: Verstimmung $\varepsilon = \nu_2 - \nu_1$ der freien Systeme.
Ordinaten: Frequenzkurven ——— (linke Zahlenreihe),
Dämpfungskurven - - - - (rechte Zahlenreihe).

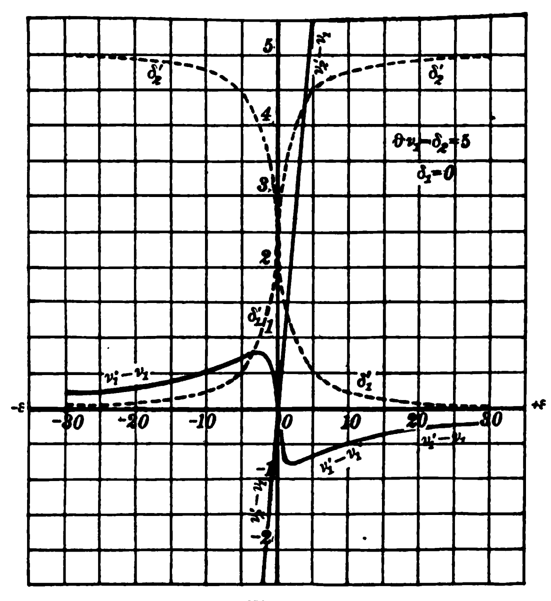


Fig. 17.
II. Dämpfung und Koppelung gleich groß, $\delta_2 - \delta_1 = \vartheta \nu_1$.
Abszissen: Verstimmung $\varepsilon = \nu_2 - \nu_1$ der freien Systeme.
Ordinaten: Frequenzkurven ———,
Dämpfungskurven - - - -.

Fig 16—19.
Verlauf der Dämpfung δ' und der Frequenz ν' der beiden Koppelungsschwingungen bei variabler Differenz $\varepsilon = \nu_2 - \nu_1$ der Frequenzen der freien Systeme. Die Frequenzkurven (ausgezogen) stellen den Unterschied $\nu_1' - \nu_1$ und $\nu_2' - \nu_1$ der resultierenden Koppelungsfrequenzen gegen die Frequenz ν_1 der schwächer gedämpften freien Schwingung dar. Die Dämpfung des Systems 1 δ_1 ist $= 0$ (genauer verschwindend klein gegen die des anderen Systems δ_2) angenommen.

Differenz der Schwingungszahlen $\varepsilon = \nu_2 - \nu_1$ stetig von $-\infty$ bis $+\infty$ wächst, läßt sich am besten an den von Wien (Wied. Ann. d. Phys. u. Chemie **61** (1897), 151) auf Grund ausführlicher hier nicht mehr wiedergegebener Rechnungen gezeichneten Figuren übersehen. Der Einfachheit halber ist daselbst der hauptsächlich interessierende Fall dargestellt, in dem die Dämpfung δ_1 des einen Teilsystems gegen die des anderen, δ_2, verschwindend klein ist, also gleich Null gesetzt werden kann. Als Abszisse ist ε, der Unterschied der freien Eigenschwingungen, als Ordinaten sind die Dämpfungen δ_1 und δ_2 sowie die Differenzen $\nu_1' - \nu_1$ und $\nu_2' - \nu_1$, d. h. der Unterschied zwischen der freien Eigenfrequenz ν_1 des schwächer gedämpften Systems und den resultierenden Koppelungsfrequenzen ν_1' und ν_2', aufgetragen; Figur 16 gilt für vorherrschende Dämpfung $\left(\delta_2 - \delta_1 > \nu_1 \sqrt{\vartheta_1 \vartheta_2}\right)$, Figur 18 für vorherrschende Koppelung $\left(\delta_2 - \delta_1 < \nu_1 \sqrt{\vartheta_1 \vartheta_2}\right)$, Figur 17 für den Übergangsfall, wo Koppelung und Dämpfung gleich sind $\left(\delta_2 - \delta_1 = \nu_1 \sqrt{\vartheta_1 \vartheta_2}\right)$. In Figur 16 ist jedoch, um die Figur nicht übermäßig groß zu machen, statt δ_2' und $\nu_2' - \nu_1$ der zehnte Teil $\frac{\delta_2'}{10}$ und $\frac{(\nu_2' - \nu_1)}{10}$ als Ordinate aufgetragen. Der Ordinatenmaßstab ist für die drei Figuren nicht gleich, so daß die Größenverhältnisse für die drei Fälle daraus nicht ersichtlich sind. Deshalb sind die Frequenzen der weniger gedämpften Schwingungen für diese drei Fälle in Figur 19 noch einmal in ein und demselben Maßstabe dargestellt. Die Rechnung ist unter der Annahme durchgeführt, daß die Größen ε, δ und $\sqrt{\nu_1 \nu_2 \vartheta_1 \vartheta_2}$ von gleicher, und zwar solcher Größenordnung sind, daß ihre dritten und höheren Potenzen neben den dritten bzw. höheren Potenzen von ν_1 verschwinden. Dann kann man für $\sqrt{\nu_1 \nu_2 \vartheta_1 \vartheta_2}$ einfach $\nu_1 \sqrt{\vartheta_1 \vartheta_2}$ setzen. Diese Annahme ist für das ganze, praktisch in Betracht kommende Bereich der Erscheinung hinreichend genau erfüllt. Die Kurven sind für bestimmte, willkürlich gewählte Werte von Dämpfung und Koppelung berechnet, lassen sich aber durch Änderung des Maßstabes ohne weiteres auf andere Werte anwenden.

Die Dämpfung der schwächer gedämpften Koppelungsschwingung ist überall mit δ_1', die der stärker gedämpften mit δ_2' bezeichnet; für die freien Systeme war bekanntlich δ_1 verschwindend klein gegen δ_2 angenommen worden. Die Frequenz der schwächer

gedämpften Schwingung ist mit ν_1', die der stärker gedämpften mit ν_2' bezeichnet. Die Dämpfungskurven sind punktiert, die Frequenzkurven ausgezogen.

In Figur 16 und 17 entspricht der Frequenz ν_2' die steil (fast als gerade Linie) von links unten nach rechts oben gehende ausgezogene Linie, der Frequenz ν_1' aber die in der Nähe der Abszissenachse verlaufende Kurve mit einem Maximum und Minimum. In Figur 18 gehört von der oberhalb der Abszissenachse gelegenen ausgezogenen Kurve die rechte Hälfte ($\varepsilon > 0$) zu ν_2', die linke ($\varepsilon < 0$) zu ν_1'; von der unter der Abszissenachse gelegenen Kurve dagegen die linke Hälfte zu ν_2', die rechte zu ν_1'. (Die Beschriftung der linken Hälften fehlt in der Figur.) Die Frequenz ν_1' liegt also immer auf demjenigen Kurvenzweig, der der Abszissenachse näher ist.

Da die stärker gedämpfte Schwingung 2 bald erlischt, so ist für den ganzen Schwingungsvorgang wesentlich das Verhalten der Schwingung 1 charakteristisch. Man entnimmt aus den Kurven, daß bei größerer Differenz ε der freien Schwingungszahlen ν_1 und ν_2 die Koppelungsschwingung ν_1' nahezu mit ν_1 übereinstimmt. In der Nähe der Resonanz, wo $\nu_2 - \nu_1$ klein ist, wächst bzw. fällt ν_1' in den Fällen 1 und 2 bis zu einem Maximum bzw. Minimum, um dazwischen in nächster Nähe der Resonanzstelle $\varepsilon = 0$, bzw. an dieser Stelle selbst, den Wert ν_1 anzunehmen. Je mehr die Koppelung hervortritt, desto mehr rücken Maximum und Minimum nach $\varepsilon = 0$ hin zusammen, so daß die Kurve der $\nu_1' - \nu_1$ sich in dem Teile zwischen ihnen immer mehr der Ordinatenachse anschmiegt, der hier auch die Kurve $\nu_2' - \nu_1$ ziemlich eng anliegt. Der steile Verlauf der Kurve im Grenzfalle $\left(\delta_2 - \delta_1 = \nu_1 \sqrt{\vartheta_1 \vartheta_2}\right)$ bedingt, daß schon geringe Änderungen der Schwingungszahlendifferenz ε, wie sie bei elastischen Körpern durch Temperaturänderung entstehen können, den Verlauf des Schwingungsvorgangs wesentlich beeinflussen, und bewirkt, daß hierbei die resultierende Frequenz ν_1' der schwächer gedämpften Koppelungsschwingung bald größer, bald kleiner ausfällt als die natürliche Frequenz ν_1 der freien Schwingung.

Im 3. Falle endlich bei überwiegender Koppelung (Figur 18) ist der Verlauf etwas anders. Die Kurve der ν_1' fällt hier eine Strecke völlig mit der Ordinatenachse zusammen; an der Stelle der Resonanz ($\varepsilon = 0$) findet daher ein plötzliches Umschlagen des schwächer gedämpften Tones ν_1' von einem Werte $> \nu_1$ zu einem

solchen $< \nu_1$ statt, wenn man das Vorzeichen der Differenz $\nu_2 - \nu_1$ ändert, d. h. die Tonhöhen der natürlichen Töne der beiden freien Systeme miteinander vertauscht. Die Werte der δ' und ν', die sich beim Resonanzpunkt ($\varepsilon = 0$) ergeben und die in Nr. 57 abgeleitet wurden, sind natürlich in dieser Darstellung mit enthalten.

59. Anwendung der Koppelungstheorie auf akustische Systeme. Die hier in den Grundzügen dargestellte Theorie der gekoppelten Schwingungen ist zwar aus den Vorstellungen der Mechanik punktförmiger Systeme heraus entwickelt. Jedoch gelten offenbar dieselben Gleichungen auch für andere, aus kontinuierlichen Massen bestehende Systeme, wenn diese nur so beschaffen sind, daß ihre Bewegung durch eine einzige Größe bestimmt werden kann, die man dann als (verallgemeinerte) Koordinate einzuführen hat. Das trifft in vielen Fällen sehr annähernd zu, und daher kann man die obige Theorie ohne weiteres auch für akustische Schwingungssysteme nutzbar machen. Die Theorie wird dabei durch die Erfahrung gut bestätigt. Ein ausgezeichnetes Beispiel bildet die Koppelung zwischen einer Stimmgabel und einem davorgehaltenen zylindrischen Luftresonator, deren Wirkung R. Koenig[1]) lange vor der Aufstellung der Theorie eingehend untersucht hat. Für die praktisch allein zu beobachtende schwächer gedämpfte Koppelungsschwingung ergibt sich qualitativ der in Figur 16 für ν_1' und δ_1' dargestellte Verlauf: bei einer c_1-Gabel von 512 Halbschwingungen (v. s.) in der Sekunde kein merkbarer Unterschied zwischen freiem Gabelton ν_1 und (schwächer gedämpftem) Koppelungston ν_1', solange der Eigenton des Resonanzkastens um mehr als eine große Terz tiefer ist als der Gabelton; bei dem Intervall der großen Terz, also dem Verhältnis $\frac{\nu_1}{\nu_2} = \frac{5}{4}$, eine Erhöhung des resultierenden Koppelungstones, entsprechend einer Vergrößerung von ν_1 um 0,011 Halbschwingungen (v. s.); bei fortschreitender Annäherung an die Resonanz weitere Zunahme der Tonhöhe bis zu einem Maximalbetrage; bei Erreichung der Resonanz plötzlicher Wegfall der Erhöhung und Herabsinken des Koppelungstones auf den Gabelton. Bei Verstimmung des Resonatortones nach oben gegen den Gabelton tritt dann eine entsprechende Vertiefung des Koppelungstones ein, die bei stärkerer Verstimmung allmählich auf Null herabgeht.

1) R. Koenig, Wied. Annalen der Physik und Chemie 9 (1880), 404. — Quelques Expériences d'Acoustique, Paris 1882, S. 181.

Die Dämpfung des gekoppelten Systems, die bei stärkerer Verstimmung ebenso gering ist wie die der freien Gabel (Zeit der Hörbarkeit etwa 80 bis 90 Sekunden), nimmt beim Erreichen der Resonanz plötzlich sehr stark zu (Hörbarkeitszeit nur 8 bis 10 Sekunden). Der Verlauf der Erscheinung wird durch die von Koenig angegebene, für die Dämpfung allerdings nur qualitativ brauchbare kleine Tabelle 13 dargestellt. Er entspricht offenbar dem Fall überwiegender Dämpfung der Figur 16. Aus den mitgeteilten Beobachtungsdaten läßt sich der Koppelungskoeffizient $\sqrt{\vartheta_1 \vartheta_2}$ berechnen; er hat den sehr kleinen Wert 0,005. Die

Tabelle 13

Rückwirkung eines zylindrischen Luftresonators mit variabler Tonhöhe auf Schwingungszahl und Dämpfung einer Stimmgabel von 512 v. s. (Tonhöhe c_1) nach R. König.

Tonhöhe des Resonators	Hörbarkeitsdauer der Gabel	Änderung der Gabelfrequenz
a_0	80 sek.	+ 0,011 v. s.
ais_0	60	+ 0,017
b_0	30	+ 0,033
496 v. s.	20	+ 0,071
c_1	8 bis 10	0
528 v. s.	18	− 0,071
cis_1	22	− 0,058
d_1	45	− 0,030
dis_1	70	− 0,017
1	2	3

Dämpfung des freien Resonators ist nicht von Koenig gemessen worden, sie muß aber groß gewesen sein, da die Dämpfung des gekoppelten Systems, die ja immer kleiner ist als die größere der freien Systeme, bereits sehr bedeutende Werte hat. Nimmt man für das logarithmische Dekrement $\mathfrak{d}$ des Resonators die in Nr. 57 angeführten Werte (0,03 und 0,3) als Grenzwerte, so ergibt sich für die Dämpfung (diejenige der Gabel δ_1 näherungsweise $= 0$ gesetzt) $\frac{\delta_2}{\nu} = 0,005$ bis 0,05. Die Vergleichung dieser Werte mit dem oben berechneten Wert 0,005 für den Koppelungskoeffizienten $\sqrt{\vartheta_1 \vartheta_2}$ beweist, daß hier der Fall überwiegender

Dämpfung vorliegt. Zugleich rechtfertigt die Kleinheit aller dieser Werte die Vernachlässigung der höheren Potenzen von ε, δ und $\nu\sqrt{\vartheta_1\vartheta_2}$ gegenüber den entsprechenden Potenzen von ν.

Der Koppelungskoeffizient ergibt sich auch bei anderen akustischen Systemen im allgemeinen sehr klein, z. B. bei den Transversalschwingungen rechteckiger Stäbe. Solche Stäbe können naturgemäß nach den beiden Kantenrichtungen des rechteckigen Querschnitts schwingen, und die Schwingungen der einen Art sind nicht ganz unabhängig von denen der anderen. Ihre Tonhöhen sind im allgemeinen verschieden, so daß die gegenseitige Störung gering ist. Versucht man die Töne durch Änderung der einen Kantenlänge gleich zu machen, so nähern sie sich einander bis zu einem kleinsten Abstand, darüber hinaus aber entfernen sie sich wieder, ohne daß es gelingt, sie ganz zum Zusammenfallen zu bringen. So beobachtete R. Koenig an einem Stab, der die beiden Töne c_5 und d_5 (mit ca. 4000 und 4500 Schwingungen pro Sekunde) gab, als er den höheren Ton auch auf c_5 zu stimmen versuchte, anfangs ein regelmäßiges Tieferwerden des von ihm Stoßton genannten Differenztones, das aber bei der Grenze von einigen 40 Schwingungen (v. d.) des Stoßtones aufhörte und bei weiterer Änderung der Kantenlänge wieder in ein Höherwerden desselben überging; eine Erscheinung, die anzeigt, daß ein genauer Einklang nicht zu erreichen ist und die sich aus der Koppelungstheorie leicht erklärt. Sieht man von der Dämpfung ab, die nur die Zahlenwerte etwas ändert, was bei einer Überschlagsrechnung aber nicht in Betracht kommt, so kann man die Formeln (25) von Nr. **54** anwenden. Setzt man die beobachtete Minimalfrequenz des Stoßtones gleich 45 pro Sekunde und die (natürliche) Schwingungszahl der beiden frei gedachten Systeme im Resonanzfall $n = 4000$, so ergibt sich für diesen Resonanzfall:

$$n_1'^2 - n_2'^2 = (n_1' - n_2')(n_1' + n_2') = 2n^2\sqrt{\vartheta_1\vartheta_2},$$

also der Koppelungskoeffizient:

$$\vartheta = \sqrt{\vartheta_1\vartheta_2} = \frac{45 \cdot 8000}{2 \cdot 4000^2} = 0{,}011.$$

Er hat somit einen gegen 1 kleinen Wert, obwohl hier schon eine ziemlich feste Koppelung vorliegt.

Namen- und Sachregister.

Lanchester, F. W., Aërodynamik. Ein Gesamtwerk über das Fliegen. Deutsch von C. und A. Runge. In 2 Bänden.

I. Band. Mit Anhängen über die Geschwindigkeit und den Impuls von Schallwellen, über die Theorie des Segelfluges usw. Mit 162 Figuren und 1 Tafel. [XIV u. 360 S.] 1909. ℳ 12.—

II. — Spezielle Probleme der Flugtechnik. [In Vorbereitung.]

Lorentz, H. A., Abhandlungen über theoretische Physik. In 2 Bänden. Band I. Mit 40 Figuren. [IV u. 489 S.] gr. 8. 1907. Geh. n. ℳ 16.—, in Leinwand geb. n. ℳ 17.— [Band II in Vorbereitung.]

Auch in 2 Lieferungen:

Lieferung I. Mit 8 Figuren. [298 S.] gr. 8. 1906. Geh. n. ℳ 10.—
Lieferung II. Mit 32 Figuren. [S. 299—489] gr. 8. 1907. Geh. n. ℳ 6.—

—— Versuch einer Theorie der elektrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern. Unveränderter Abdruck der 1895 bei J. Brill in Leiden erschienenen 1. Auflage [III u. 138 S.] gr. 8. 1906. In Leinwand geb. n. ℳ 3.20.

—— the Theory of Electrons and its Applications to the Phenomena of Light and Radiant Heat. A course of lectures delivered in Columbia University New York in March and April 1906. [IV u. 332 S.] gr. 8. 1909. In Leinwand geb. n. ℳ 9.—

Love, A. E. H., Lehrbuch der Elastizität. Autorisierte deutsche Ausgabe unter Mitwirkung des Verfassers besorgt von A. Timpe. Mit 75 Abbildungen. [XVI u. 664 S.] gr. 8. 1907. Geb. n. ℳ 16.—

Marcolongo, R., rationelle Mechanik. Deutsch von K. Boehm. 2 Bände. gr. 8. Geb. [Unter der Presse.]

Perry, J., Drehkreisel. Deutsche Ausgabe, besorgt von A. Walzel. Mit 58 Abbildungen und 1 Titelbild. [VIII u. 125 S.] 8. 1904. In Leinwand geb. n. ℳ 2.80.

—— höhere Analysis für Ingenieure. Autorisierte deutsche Bearbeitung von R. Fricke und Fr. Süchting. 2., verbesserte und erweiterte Auflage. Mit 106 Figuren. [XII u. 464 S] gr. 8. 1910. In Leinwand geb. n. ℳ 13.—

Pockels, F., Lehrbuch der Kristalloptik. Mit 168 Figuren und 6 Doppeltafeln. [X u. 519 S.] gr. 8. 1906. In Leinwand geb. n. ℳ 16.—

Richarz, F., neuere Fortschritte auf dem Gebiete der Elektrizität. 2. Auflage. Mit 97 Abbildungen. [VI u. 128 S.] gr. 8. 1902. In Leinwand geb. n. ℳ 1.50.

—— Anfangsgründe der Maxwellschen Theorie verknüpft mit der Elektronentheorie. [IX u. 246 S.] gr. 8. 1909. Geh. n. ℳ 7.—, geb. n. ℳ 8.—

Schuster, A., Einführung in die theoretische Optik. Autorisierte deutsche Ausgabe übersetzt von H. Konen. Mit 2 Tafeln und 185 Figuren. [XIV u. 413 S.] gr. 8. 1907. Geh. n. ℳ 12.—, in Leinwand geb. n. ℳ 13.—

Starke, H., experimentelle Elektrizitätslehre, verbunden mit einer Einführung in die Maxwellsche und die Elektronentheorie der Elektrizität und des Lichts. 2., auf Grund der Fortschritte der Wissenschaft umgearbeitete und erweiterte Auflage. Mit zahlreichen Abbildungen. [ca. 662 S.] gr. 8. 1910. In Leinwand geb. ca. n. *M* 9.—

Taschenbuch für Mathematiker und Physiker. I. Jahrg. 1909/10. Unter Mitwirkung von Fr. Auerbach, O. Knopf, H. Liebmann, E. Wölffing u. a. herausgegeben von F. Auerbach. Mit einem Bildnis Lord Kelvins. [XLIV u. 450 S.] 8. 1909. In Leinwand geb. n. *M* 6.—

—— II. Jahrg. 1911. Unter Mitwirkung von D. Hilbert, H. Greinacher, G. Hessenberg, O. Knopf, H. Liebmann, W. Lietzmann, H. Reissner, K. Simons, O. Töplitz, W. Wien und R. Ziegel herausgegeben von F. Auerbach und R. Rothe. Mit einem Bildnis H. Minkowskis. [ca. 500 S.] 8. In Leinwand geb. ca. n. *M* 6.— [Erscheint im Dezember 1910.]

Thomson, J. J., Elektrizitäts-Durchgang in Gasen. Deutsche autor. Ausgabe, unter Mitwirkung des Autors besorgt und ergänzt von E. Marx. Mit 187 Figuren. [VII u. 587 S.] gr. 8. 1906. Geh. n. *M* 18.—, geb. n. *M* 19.—

Voigt, W., Magneto- und Elektrooptik. Mit 75 Figuren. [XIV u. 396 S.] gr. 8. 1908. In Leinwand geb. n. *M* 14.—

—— Kristall-Physik. (Mit Ausnahme der Kristall-Optik.) gr. 8. In Leinwand geb. [Erscheint im Oktober 1910.]

Webster, A. G., the Dynamics of Particles, and of rigid, elastic, and fluid Bodies, being Lectures on mathematical Physics. Mit zahlreichen Figuren. [XII u. 588 S.] gr. 8. 1904. Geb. n. *M* 14.—

Wien, W., über Elektronen. Vortrag, gehalten auf der 77. Versammlung deutscher Naturforscher und Ärzte in Meran. 2., die Fortschritte der Wissenschaft berücksichtigende Auflage. [39 S.] gr. 8. 1909. Geh. n. *M* 1.40.

Wüllner, A., Lehrbuch der Experimentalphysik. In 4 Bänden. Mit über 1100 Abbildungen, Figuren und 4 lithographierten Tafeln. gr. 8. 1895/1907.

Bei gleichzeitigem Bezuge aller 4 Bände ermäßigt sich der Preis geh. auf n. *M* 32.—, geb. auf n. *M* 40.—

Jeder Band ist auch einzeln käuflich:

I. Band. Allgemeine Physik und Akustik. 6. Auflage bearbeitet von A. Wüllner und A. Hagenbach. Mit 333 Abbildungen und Textfiguren. [XIV u. 1058 S.] 1907. Geh. n. *M* 16.—, geb. n. *M* 18.—

II. — Die Lehre von der Wärme. 5. Auflage. Mit 131 Abbildungen und Textfiguren. [XI u. 936 S.] 1896. Geh. n. *M* 12.—, geb. n. *M* 14.—

III. — Die Lehre vom Magnetismus und von der Elektrizität mit einer Einleitung: Grundzüge der Lehre vom Potential. 5. Auflage. Mit 341 Abbildungen und Textfiguren. [XV u. 1415 S.] 1897. Geh. n. *M* 18.—, geb. n. *M* 20.—

IV. — Die Lehre von der Strahlung. 5. Auflage. Mit 299 Abbildungen, Textfiguren und 4 lithographierten Tafeln. [XII u. 1042 S.] 1899. Geh. n. *M* 14.—, geb. n. *M* 16.—

DATE DUE

